

P R O S E M I N A R

zur Vorlesung

“Mathematische Modelle in der Technik”

PS I

23.10. 2008 (Zeit : 12⁰⁰ – 13³⁰ Raum : HS 13) : 1 - 4

1 Wärmeleit- und Wärmetransportprobleme

1.1 Analytische Hilfsmittel

1 Man zeige, dass

a)

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}}^{x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 = f(x_1, x_2, x_3)$$

gilt, falls $f \in C(\Omega)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$,

b)

$$\lim_{\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3} \int_{x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}} \int_{x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}} \left[\sigma\left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) - \sigma\left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, \xi_2, \xi_3\right) \right] d\xi_3 d\xi_2 = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x_1}$$

gilt, falls $\sigma \in C^1(\Omega)$.

c) Wie kann man die Voraussetzungen an f in a) bzw. an σ in b) abschwächen ?

1.2 Analytische Lösung und Parameterstudien

2 Berechnen Sie analytisch das Temperaturfeld $u(\cdot)$ gemäss der Wärmeleitgleichung (1.5)_{V0} aus der Vorlesung für die Daten:

$a = 0, b = 1, \eta \in (0, 1)$ fix, $q = 0, f = 0, g_a = 0, g_b = 1$ und

$$\lambda(x) := \begin{cases} \lambda_1 = \text{const} > 0 & \text{für } x < \eta \\ \lambda_2 = \text{const} > 0 & \text{für } x > \eta \end{cases}$$

mit $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$!

Führen Sie Parameterstudien mit dem Wärmeleitkoeffizienten durch:

a) $\lambda_1 \longrightarrow \infty$

b) $\lambda_2 \longrightarrow 0$

- 3 Wir betrachten wieder das Wärmeleitproblem aus 2 aber jetzt mit freiem Wärmeübergang am rechten Randpunkt $x = b = 1$:

$$\lambda_2 u'(b) = \alpha(u(b) - 1)$$

mit einer positiven Wärmeübergangszahl α . Berechnen Sie wieder analytisch das Temperaturfeld $u(\cdot)$ und führen Sie jetzt Parameterstudien mit der Wärmeübergangszahl α durch:

a) $\alpha \longrightarrow \infty$

b) $\alpha \longrightarrow 0$

- 4 Bestimmen Sie die von einem (fixierten) Parameter $y \in (0, 1)$ abhängige Lösung $u_y(\cdot)$ der Randwertaufgabe (Wärmeleitproblem mit Punktquelle)

$$\begin{aligned} -u''(x) &= \delta(x - y), \quad x \in (0, 1) & (f_y = 1), \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass

$$u(x) = \int_0^1 G(x, y) f(y) dy, \quad x \in [0, 1]$$

mit $G(x, y) := u_y(x)$ die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x), \quad x \in (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$