Parallel Algorithm in Computational Mathematics SS 2008
Tutorial 7 Thursday, 26 June 2008, HF 136, 15.30 – 17.00

---

1. Paralleles FEM Programm fertigstellen.

DD-Vorkonditionierer in 2D

2. Zeige Lemma 6.9 aus der Vorlesung: Seien A und C reguläre SPD Matrizen und B eine spaltenreguläre Matrix. Weiterhin sei

$$\gamma = \max_{\substack{u \neq 0 \\ v \neq 0}} \frac{\underline{u}^\top B\, \underline{v}}{\sqrt{\underline{u}^\top A\, \underline{u}}\, \sqrt{\underline{v}^\top C\, \underline{v}}}\,.$$

Dann ist γ^2 der maximale Eigenwert des verallgemeinerten Eigenwertproblems

$$B^\top A^{-1} B\, \underline{u} = \lambda\, C\, \underline{u}\,.$$

Hinweis: Starte beim Rayleigh-Quotienten des obigen Eigenwertproblems und verwende die Eigenschaft

$$\sqrt{\underline{y}^\top A^{-1}\, \underline{y}} = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{(A^{-1/2}\underline{y},\, \underline{x})}{\|\underline{x}\|} \qquad \forall \underline{y}\,,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Euklidsche Norm bezeichnet. Warum gilt diese wenn A SPD?

2.* Zeige die Aussage von Beispiel 2. unter der schwächeren Voraussetzung dass C nur symmetrisch positiv semidefinit ist und $\ker(C) \subset \ker(B)$.

3. Sei $C = \begin{pmatrix} C_{CC} & C_{CI} \\ C_{IC} & C_{II} \end{pmatrix}$ ein SPD-Vorkonditionierer für $K_h = \begin{pmatrix} K_{CC} & K_{CI} \\ K_{IC} & K_I I \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft

$$c_1\, C \leq K_h \leq c_2\, C\,,$$

und sei $E := -C_{II}^{-1} C_{IC}$ (spezielle Wahl der "Extension"). Zeige die Spektralabschätzung

$$\left(I \mid E^\top\right) K_h \begin{pmatrix} I \\ E \end{pmatrix} \leq \frac{c_2}{c_1}\, S\,,$$

wobei $S = K_{CC} - K_{CI} K_{II}^{-1} K_{IC}$ das Schur-Komplement und I die Identität bezeichnet.

Hinweis: Ist das entsprechende Schur-Komplement $S_C = C_{CC} - C_{CI} C_{II}^{-1} C_{IC}$ zu S spektral-äquivalent?

4.* (für DoktoratsstudentInnen)
Untersuche für das Modellproblem Einheitsquadrat mit 4 Teilgebieten numerisch die Block-Vorkonditionierer

$$\begin{pmatrix} K_{VV} & 0 & 0 \\ 0 & K_{EE} & K_{EI} \\ 0 & K_{IE} & K_{II} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} K_{VV} & 0 & 0 \\ 0 & K_{EE} & 0 \\ 0 & 0 & K_{II} \end{pmatrix}$$

auf Konditionszahlen (in Abhängigkeit on h).

FETI Methoden

In dieser Übung werden wir zum Abschluss dieses Semesters FETI (finite element tearing and interconnecting) Methoden zu sehen bekommen.