Parallel Algorithm in Computational Mathematics SS 2008
Tutorial 6 Thursday, 12 June 2008, HF 136, 15.30 – 17.00

Vorkonditionierung: Allgemeine Grundlagen

1. Kroneckerprodukt:

   Es seien $A \in \mathbb{C}^{k\times l}$ and $B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Dann heißt die Matrix

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1l}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2l}B \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{k1}B & a_{k2}B & \cdots & a_{kl}B \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{km\times ln}$$

   Kroneckerprodukt zwischen den Matrizen A and B. Man zeige die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} (\alpha A)\otimes B &= A\otimes(\alpha B) = \alpha(A\otimes B), && (1)\\ (A\otimes B)^T &= A^T\otimes B^T, && (2)\\ (A+C)\otimes B &= A\otimes B + C\otimes B, && (3)\\ (A\otimes B)(D\otimes E) &= (AD)\otimes(BE), && (4)\\ (A\otimes B)^{-1} &= A^{-1}\otimes B^{-1}, && (5)\end{aligned}$$

   wobei $\alpha \in \mathbb{C}$, $C \in \mathbb{C}^{k\times l}$, $D \in \mathbb{C}^{l\times s}$, $E \in \mathbb{C}^{n\times r}$, sowie als Zusatzvoraussetzung $A \in \mathbb{C}^{l\times l}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ für (5).

2. Es seien $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ and $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Weiterhin sei λ_i^A ein Eigenwert and $\underline{x}_i^A$ der zugehörige Eigenvektor von A, $(\lambda_j^B, \underline{x}_j^B)$ ein Eigenpaar von B. Man zeige, dass $\lambda_i^A\lambda_j^B$ ein Eigenwert von $A\otimes B$ zum Eigenvektor $\underline{x}_i^A \otimes \underline{x}_j^B$ ist.

Vorkonditionierung: Additiv und Multiplikativ Schwarzsche Methoden

3. Sei $a(\cdot,\cdot)$ eine spd-Bilinearform auf einem endlichdimensionalen Raum $\mathbb{V}$. Weiterhin sei $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1$ und $\cos\angle(\mathbb{V}_0, \mathbb{V}_1) = \gamma < 1$ bzgl. $a(\cdot,\cdot)$. Es seien P_i, $i = 0, 1$ die orthogonalen Projektionen auf $\mathbb{V}_i$ bzgl. $a(\cdot,\cdot)$. Wir betrachten die Lösung von:
   Suche $u \in \mathbb{V}$, so dass

$$a(u, v) = (f, v) \quad \text{für alle} \quad v \in \mathbb{V} \tag{6}$$

   gilt, wobei $f \in \mathbb{V}$ gegeben. Die exakte Lösung sei $u^{(*)}$. Das endlichdimensionale Variationsproblem (6) werde iterativ mit dem folgenden Verfahren gelöst:

   - Setze $u_0 = 0$,
   - for $i = 1, \ldots$ do
   - Setze $u_{i+1/2} = u_i + w$, wobei $w \in \mathbb{V}_0$ die Lösung von
     $a(w, v_0) = (f, v_0) - a(u_i, v_0)$ für alle $v_0 \in \mathbb{V}_0$ ist.
   - Setze $u_{i+1} = u_{i+1/2} + w$, wobei $w \in \mathbb{V}_1$ die Lösung von
     $a(w, v_1) = (f, v_1) - a(u_{i+1/2}, v_1)$ für alle $v_1 \in \mathbb{V}_1$ ist.
   - end do.

Man gebe eine obere Schranke für

$$\frac{a(u_{i+1} - u^{(*)}, u_{i+1} - u^{(*)})}{a(u_i - u^{(*)}, u_i - u^{(*)})}$$

an, die kleiner als 1 ist.

Hinweis: Sei $e_i := u_i - u^{(*)}$ und $e_{i+1/2}$, e_{i+1} analog definiert. Zeige zunächst dass $a(e_i, e_{i+1/2}) = 0$ und $a(e_{i+1/2}, e_{i+1}) = 0$. Damit lassen sich unter den gegebenen Voraussetzungen die Ungleichungen

$$\frac{\|e_{i+1}\|_A}{\|e_{i+1/2}\|_A} \leq \gamma\,, \qquad \frac{\|e_{i+1/2}\|_A}{\|e_i\|_A} \leq \gamma$$

zeigen, wobei $\|v\|_A := a(v, v)^{1/2}$.

4. Wir betrachten die Zerlegung $\mathbb{V} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{V}_i$. Man gebe eine Matrix-Interpretation des zugehörigen ASM und MSM Vorkonditionierers an.

   Hinweis: Was passiert, wenn die Räume $\mathbb{V}_i$ jeweils eindimensional sind?

5. Wir betrachten die Zerlegung $\mathbb{V} = \bigoplus_{i=0}^m \mathbb{V}_i$ mit den orthogonalen Projektionen P_i auf $\mathbb{V}_i$ bzgl. $a(\cdot, \cdot)$. Sei nun $P := \sum_{i=0}^m P_i$ und die Matrizen K, C^{-1} wie in der Vorlesung definiert. Man beweise

$$a(Pu, v) = \sum_{i=0}^m a(P_i u, v) = \underline{v}^T K C^{-1} K \underline{u}.$$

6. Zerlegung und Projektionen wie in Bsp. 5. Zeige

$$\lambda_{max}(P) = \max_{v \in \mathbb{V}} \frac{a(Pv, v)}{a(v, v)} \leq m + 1.$$

   Hinweis: Dies ist leicht zu zeigen sobald man sich sicher ist dass $\|P_i v\|_A \leq \|v\|_A$.