Parallel Algorithm in Computational Mathematics SS 2008
Tutorial 5 Thursday, 05 June 2008, HF 136, 15.30 – 17.00

Parallele FEM

1. Versuche das Programmierbeispiel der letzten Übung fertigzustellen bzw. zumindest die grundlegenden Konzepte wie Akkumulation und FEM-Matrix-Vektor-Produkt für eine der beiden Geometrien korrekt zu implementieren.

Vorkonditionierung: Allgemeine Grundlagen

2. Sei $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix (spd-Matrix). Man zeige:

   (a) A_{22} ist regulär.

   (b) Sei $\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix}$. Dann gilt $(S\underline{x}_1, \underline{x}_1) = \min_{\underline{x}_2}(A\underline{x}, \underline{x})$ mit dem Schur-Komplement $S = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

   (c) Das Schur-Komplement ist positiv definit.

3. Es seien

   - $a(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische, beschränkte und elliptische Bilinearform auf einem Funktionenraum $\mathbb{X}$,
   - $\Psi = [\psi_1, \dots, \psi_n]$ die Basis eines endlichdimensionalen Teilraumes $\mathbb{V}_n \subset \mathbb{X}$,
   - $K = [a(\psi_j, \psi_i)]_{i,j=1}^n$,
   - $b(\cdot, \cdot)$ eine weitere symmetrische Bilinearform mit

   $$c_1 b(u, u) \le a(u, u) \le c_2 b(u, u) \quad \forall u \in \mathbb{X},$$

   - $C = [b(\psi_j, \psi_i)]_{i,j=1}^n$.

   Man zeige:

   (a) Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ ist symmetrisch, beschränkt und elliptisch auf $\mathbb{X}$.

   (b) Die Matrizen C und K sind spd-Matrizen.

   (c) $(K\underline{u}, \underline{v})$ definiert ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

   (d) Es gilt
   $$c_1(C\underline{u}, \underline{u}) \le (K\underline{u}, \underline{u}) \le c_2(C\underline{u}, \underline{u}) \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^n, \quad c_1 > 0$$

   (e) $\lambda_{min}(C^{-1/2}KC^{-1/2}) \ge c_1^{-1}$, $\lambda_{max}(C^{-1/2}KC^{-1/2}) \le c_2$.

   Es darf aus der linearen Algebra verwendet werden:
   Für eine beliebige spd-Matrix M existiert genau eine spd-Matrix $M^{1/2}$ (mit ihrer Inversen $M^{-1/2}$) sodass $M = M^{1/2}M^{1/2}$ und $M^{-1} = M^{-1/2}M^{-1/2}$.

4. Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus Aufgabe 3 sei $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_n] = \Psi W$ eine stabile Basis bzgl. $b(\cdot, \cdot)$, d. h. für alle $u = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i$ gilt

   $$c_3 \sum_{i=1}^n u_i^2 d_i^2 \le b(u, u) \le c_4 \sum_{i=1}^n u_i^2 d_i^2.$$

   Die Konstanten $c_3 > 0$ und c_4 hängen dabei nicht von n ab und es gilt $d_i \neq 0$.

(a) Man zeige, dass die Basis Φ auch stabil bezüglich der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ ist.

(b) Sei $D = \operatorname{diag}[d_i^2]_{i=1}^n$ und $\tilde{C}^{-1} = W^T D^{-1} W$. Man gebe möglichst scharfe Abschätzungen für die Konditionszahl von $\tilde{C}^{-1}K$ an.

5. Sei

$$T_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Man zeige: $\lambda_i = 4\sin^2 \frac{\pi i}{2n+2}$ ist ein Eigenwert zum Eigenvektor

$$v_i = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left[\sin \frac{ij\pi}{n+1} \right]_{i,j=1}^n \qquad \forall i = 1, \dots, n.$$

6. Man berechne

$$\sum_{i=1}^m \frac{2\sin^2 \frac{\pi i}{m+1}}{4\sin^2 \frac{\pi i}{2m+2}}.$$

Hinweis: Verwende die Beziehung $2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$.