

5. Nichtlineare Gleichungen

1. Gegeben sei die Gleichung $x^3 = 5x - 1$. Durch grafische Darstellung und/oder Bisektion hat man festgestellt, daß die 3 Nullstellen etwa bei -2.35 , 0.20 und 2.10 liegen. Der genaue Wert soll nun durch Fixpunktiteration $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ ermittelt werden.
 - (a) Geben Sie verschiedene Fixpunktiterationen an.
 - (b) Welche Konvergenzeigenschaften sind von den zu den Fixpunktgleichungen gehörigen Iterationsverfahren $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ in der Umgebung der drei Nullstellen zu erwarten?
 - (c) Mit $x_0 = 2.10$ sind einige (5 bis 10) Iterationsschritte durchzurechnen.
 - (d) Man gebe eine Fehlerabschätzung für $|x_7 - x^*|$ an.
2. Gegeben sei ein Iterationsverfahren $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, wobei für den Fixpunkt x^* die Ungleichung $|\varphi'(x^*)| < 1$ gelten soll. Veranschaulichen Sie grafisch den Unterschied im Konvergenzverhalten der Folge $\{x_n\}$ in den beiden Fällen
 - (a) $0 < \varphi'(x^*) < 1$ und (b) $-1 < \varphi'(x^*) < 0$.
3. Das Polynom $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + a_0$ hat für $a_0 = 16$ die vierfache Nullstelle $x = 2$. Wo liegen die Nullstellen für $a_0 = 16 \pm 10^{-4}$?
4. Man löse für $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = 2x^2 + x^4y^2 + 2y^4 + 2x^2y^6 - 2xy$$

die Optimierungsaufgabe $f(x, y) \rightarrow \min$.