4. Lineare Gleichungssysteme: Direkte Verfahren

1. Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der LU-Zerlegung der Koeffizientenmatrix!

   (b) Bei der Anwendung des Gauß-Algorithmus entsteht ein Gleichungssystem

   $$Ux = \tilde{L}^{-1} f.$$

   Geben Sie $\tilde{L}^{-1}$ an!

   (c) Lösen Sie das Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (d) Ähnlich der LU-Zerlegung kann man eine Matrix in das Produkt
   - einer linken unteren Dreiecksmatrix L (mit Einsen auf der Hauptdiagonale),
   - einer Diagonalmatrix D und
   - einer rechten oberen Dreiecksmatrix R (mit Einsen auf der Hauptdiagonale)

   zerlegen. Führen Sie diese Zerlegung für das Beispiel aus! (Da die Matrix symmetrisch ist, müßte sich $R = L^T$ ergeben.)

2. Unter Zeilenskalierung werde die Multiplikation eines Gleichungssystems mit einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}\{d_i\}$ von links verstanden:

$$Ax = b \;\rightarrow\; DAx = Db.$$

Die Skalierung wird durchgeführt mit dem Ziel der Verbesserung der numerischen Eigenschaften der Gleichungssystems in bezug auf die Fortpflanzung der Dateneingangsfehler ΔA und Δb.

Zeilenäquilibrierung ist die spezielle Form der Zeilenskalierung, bei der

$$d_i = \frac{\max\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|}{\sum\limits_j |a_{ij}|}$$

gewählt wird.

Wie lautet die Systemmatrix DA nach Zeilenäquilibrierung, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 100 & 2 & 0 \\ 3 & 1000 & 1 & 4 \\ 10 & 1 & 9 & 20 \\ 6 & 0 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem zunächst ohne und dann mit Zeilenäquilibrierung! Verwenden Sie dabei den Gaußalgorithmus mit Spaltenpivotisierung und eine fünfstellige dezimale Gleitpunktarithmetik!

$$\begin{pmatrix} 2.1 & 2512 & -2516 \\ -1.3 & 8.8 & -7.6 \\ 0.9 & -6.2 & 4.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ -5.3 \\ 2.9 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vergleichen Sie die erhaltenen Lösungen mit der exakten Lösung $x_1 = 5$, $x_2 = x_3 = 1$!