

3. Numerische Integration

1. Berechnen Sie das Integral $\int_0^2 \sqrt{x} \, dx$ mit der Mittelpunkregel, der Trapezregel, der Simpsonregel und der 3/8-Regel. Vergleichen Sie die Fehler!

2. Integrieren Sie $\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx$ exakt sowie

- (a) mit der zusammengesetzten Mittelpunkregel (10 Knoten, $h = 0.1$),
- (b) mit der zusammengesetzten Trapezregel (11 Knoten, $h = 0.1$) und
- (c) mit der zusammengesetzten Simpsonregel (11 Knoten, $h = 0.2$).

Schätzen Sie den Fehler ab und vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler!

3. Erläutern Sie das Prinzip der Romberg-Integration und integrieren Sie auf diese Weise $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} \, dx$ mittels Trapezregel. (Anfangsschrittweite $h_0 = \pi$)!
4. (a) Implementiere für gegebene Schrittweite h und Intervallgrenzen a, b die summierte Trapezregel.

- (b) Ein Fussballfeld wird vorübergehend als Schafweide genutzt. Eines der Schafe befindet sich genau auf dem Mittelkreis (Durchmesser 9.15m). Der Anteil des Mittelkreises, der vom angepflockten Schaf abgegrast werden kann, wenn dessen Leine l Meter lang ist, beträgt

$$A(l) = \frac{2 \int_0^a \sqrt{l^2 - x^2} - (r - \sqrt{r^2 - x^2}) dx}{\pi r^2}$$

mit

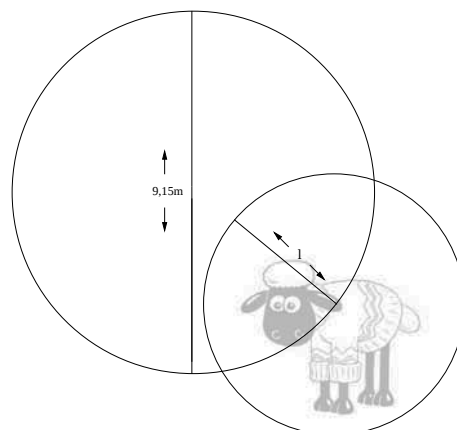
$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l^2 - 2r^2}{2r} \right)^2}, \quad r = \frac{9.15\text{m}}{2}.$$

Bestimme $A(5\text{m})$ und $A(6\text{m})$ unter Verwendung der summierten Trapezregel mit Schrittweite $h = 0.001$.

- (c) Mit Hilfe des Bisektionsverfahrens soll nun die Leinenlänge $\hat{l}$ bestimmt werden, so dass genau die Hälfte des Mittelkreises abgegrast werden kann. Dabei gibt man sich zwei Längen l_{links} und l_{rechts} mit

$$A(l_{\text{links}}) \leq 1/2 \leq A(l_{\text{rechts}})$$

vor und berechnet $A(l_{\text{Mitte}})$ mit $l_{\text{Mitte}} = (l_{\text{links}} + l_{\text{rechts}})/2$. Wenn $A(l_{\text{Mitte}}) < 1/2$, dann wird l_{links} durch l_{Mitte} ersetzt, ansonsten l_{rechts} durch l_{Mitte} . Das Verfahren wird so lange fortgesetzt bis das Intervall $[l_{\text{links}}, l_{\text{rechts}}]$ genügend klein ist. Implementiere dieses Verfahren und bestimme die ersten vier Dezimalstellen von $\hat{l}$. Die Werte von $A(l_i)$ sollen wiederum unter Verwendung der summierten Trapezregel mit Schrittweite $h = 0.001$ berechnet werden.



5. Zusammengesetzte Newton-Cotes-Formeln für periodische Funktionen

- (a) Gegeben sei eine periodische Funktion $f(x)$. Schreiben Sie die zusammengesetzte Trapezregel zur Integration von $f(x)$ über einer Periode auf! Welche Besonderheit tritt auf?

(b) Zeigen Sie, daß diese Regel bei Verwendung von m Knoten trigonometrische Polynome $(m - 1)$ -ten Grades,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{m-1} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

exakt integriert.

Hinweis: Für $x \neq 2k\pi$ gilt

$$\sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \sin kx = \sin \frac{mx}{2} \sin \frac{(m-1)x}{2}, \quad (1)$$

$$\sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \cos kx = \sin \frac{mx}{2} \cos \frac{(m-1)x}{2}. \quad (2)$$

Zusatz: Beweisen Sie die Beziehungen (1) und (2).