2. Interpolation

1. Gegeben seien die $n+1$-Stützstellen x_i, $i = 0, \ldots, n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Zeigen Sie, daß die Lagrange-Interpolationspolynome

$$l_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, \ldots, n$$

folgende Bedingungen erfüllen:

- $l_j(x_i) = 1$ für $i = j$ und $l_j(x_i) = 0$ für $i \neq j$.
- Die Polynome $\{l_j\}_{j=0}^n$ bilden eine Basis im Raum der Polynome maximal n-ten Grades.

2. Bestimmen Sie das Interpolationspolynom höchstens 2. (3.) Grades, das an den Stellen $x = -1,\ 0,\ 2\ (,1)$ die Werte von $f(x) = 2^x$ annimmt, mit Hilfe der Lagrangeschen und der Newtonschen Formel!
Berechnen Sie damit näherungsweise $\sqrt{2}$.
Schätzen Sie den Fehler für diese Näherung und für das gesamte Interpolationsintervall ab!

3. Gegeben seien die Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und die Lagrange-Interpolationspolynome

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad j = 0, \ldots, n.$$

Man zeige, daß diese Polynome in dem für Polynome maximal n-ten Grades definierten Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) g(x_i)$$

zueinander orthonormal sind. Ist dies ein Skalarprodukt im Raum der Polynome maximal $n+1$-ten Grades?

4. Gegeben seien die folgenden Wertepaare:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.4	1	-2	1	-0.4

(a) Man bestimme den zugehörigen linearen C^0-Spline.

(b) Man bestimme den zugehörigen kubischen C^2-Spline $S(x)$ mit $S^{(k)}(2) = S^{(k)}(-2)$, $k = 1, 2$.

5. Gegeben seien die folgenden Wertepaare:

x_i	-3	-2	-1	999	1000	1001
y_i	1	-1	1	1	1	0

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom 5. Grades mittels allgemeinen und mittels Lagrangeschen Ansatz. Nutzen Sie eine 4-stellige dezimale Gleitkommaarithmetik und vergleichen Sie die Ergebnisse für $x = 0$ mit dem exakten Wert $\frac{-1994001}{672684016}$.