1. Gleitpunktdarstellung, Fehleranalyse

1. Berechnen Sie die kleinere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 1.6x + 0.0001 = 0$ ($p = 0.8$, $q = 0.1 \cdot 10^{-3}$) unter der Annahme einer vierstelligen Mantisse zur Basis 10! Bestimmen Sie den relativen Fehler!

   Algorithmus 1: $x_1 = p - \sqrt{p^2 - q}$.

   Algorithmus 2: $x_2 = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_1 = \dfrac{q}{x_2}$.

2. Bekanntlich divergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Gilt das auch für die Computerarithmetik?

   Testen Sie Ihre Überlegungen mit Hilfe eines kleinen Computerprogramms! Verwenden Sie dabei nur **einfach genaue** Zahlen! (nicht mit MATLAB)

3. Man finde die kleinste IEEE Gleitkommazahl (doppelte Genauigkeit) $1 < x < 2$, so daß $\texttt{x} * (\texttt{1/x}) := \mathrm{fl}(x \cdot \mathrm{fl}(1/x))$ nicht exakt 1 ergibt.

   Dazu überlege man sich, daß die Gleitkommazahlen im Intervall $(1, 2)$ ein äquidistantes Gitter der Schrittweite $\varepsilon = 2^{-52}$ bilden: $x = 1 + k\varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, 2^{52} - 1$.
   Finden Sie die Lösung dann mit Hilfe eines Computerprogramms.

4. Sei x eine Gleitkommazahl im Intervall $(1, 2)$. Man zeige $\texttt{x} * (\texttt{1/x}) \in \{1 - \frac{\varepsilon}{2}, 1\}$.

5. Man löse unter Benutzung einer zweistelligen Gleitkommaarithmetik das Gleichungssystem

   $$\begin{pmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

   mit Gaußscher Eliminationsmethode, d.h. durch Elimination von x_1 aus der zweitem Gleichung und Rückwärtseinsetzen in der ersten Gleichung. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Lösung.