Das PCG-Verfahren

Das Verfahren zur Lösung von $Ax = b$ mit Startwert $x^{(0)}$ und Vorkonditionierung W lautet wiefolgt:

- Initialisierung:

$$\begin{aligned} r^{(0)} &= Ax^{(0)} - b \\ w^{(0)} &= W^{-1} r^{(0)} \\ p^{(0)} &= w^{(0)} \end{aligned}$$

- Iteration:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \alpha_k p^{(k)} \\ r^{(k+1)} &= r^{(k)} + \alpha_k A p^{(k)} \\ w^{(k+1)} &= W^{-1} r^{(k)} \\ p^{(k+1)} &= \beta_k p^{(k)} + w^{(k+1)} \end{aligned}$$

Die Parameter α_k werden dabei so gewählt, daß der Fehler $e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^*$ im A-Skalarprodukt, d.h. $\langle e^{(k+1)}, e^{(k+1)} \rangle = (e^{(k+1)})^\top A e^{(k+1)}$, minimal wird. Man erhält nach kurzer Rechnung (vgl. Vorlesung)

$$\alpha_k = -\frac{\langle p^{(k)}, e^{(k)} \rangle}{\langle p^{(k)}, p^{(k)} \rangle} = -\frac{\left(p^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ap^{(k)}, p^{(k)}\right)}.$$

Man kann nun zeigen, daß

$$\alpha_k = -\frac{\left(w^{(k)}, r^{(k)}\right)}{\left(Ap^{(k)}, p^{(k)}\right)} \tag{1}$$

gilt. Die Parameter β_k werden so gewählt, daß die Suchrichtungen $p^{(k+1)}$ und $p^{(k)}$ zueinander A-orthogonal sind, d.h. $\langle p^{(k+1)}, p^{(k)} \rangle = 0$. Damit erhält man

$$\beta_k = \frac{\langle p^{(k)}, w^{(k+1)} \rangle}{\langle p^{(k)}, p^{(k)} \rangle} = \frac{\left(Ap^{(k)}, w^{(k+1)}\right)}{\left(Ap^{(k)}, p^{(k)}\right)}.$$

Man kann nun zeigen, daß

$$\beta_k = \frac{\left(w^{(k+1)}, r^{(k+1)}\right)}{\left(w^{(k)}, r^{(k)}\right)} \tag{2}$$

gilt.

Im Algorithmus wurden einige Beziehungen, u.a. (1) und (2), die beim PCG-Verfahren gelten, ohne Beweis angegeben. Das wollen wir jetzt nachholen. Die Aufgaben (a)–(c) dienen als Vorbereitung für die Aufgaben (d)–(f). Man beachte aber auch die unten stehenden Hinweise.

1. Man beweise $e^{(k)} = e^{(k-1)} + \alpha_{k-1} p^{(k-1)}$ für $k \geq 1$.
2. Man beweise $\langle e^{(k)}, p^{(j)} \rangle = 0$ für $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$.
3. Man beweise $\langle e^{(k)}, w^{(j)} \rangle = 0$ für $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$. Man überlege sich, daß das äquivalent zu $(r^{(k)}, w^{(j)}) = (w^{(k)}, r^{(j)}) = 0$ ist.
4. Die Formeln für α_k sind im allgemeinen Teil der Vorlesung und im konkreten CG-Verfahren unterschiedlich angegeben:

$$\alpha_k = -\frac{\langle e^{(k)}, p^{(k)} \rangle}{\langle p^{(k)}, p^{(k)} \rangle} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_k = -\frac{(r^{(k)}, w^{(k)})}{(Ap^{(k)}, p^{(k)})}.$$

Man beweise, daß beide Ausdrücke gleich sind.

5. β_k wird so gewählt, daß $\langle p^{(k+1)}, p^{(k)} \rangle = 0$ wird. Das führt zunächst auf

$$\beta_k = -\frac{\langle w^{(k+1)}, p^{(k)} \rangle}{\langle p^{(k)}, p^{(k)} \rangle} \quad \text{anstatt} \quad \beta_k = \frac{(w^{(k+1)}, r^{(k+1)})}{(w^{(k)}, r^{(k)})},$$

   wie es in der Vorlesung angegeben wurde. Man beweise, daß beide Ausdrücke gleich sind.

6. Man beweise $\langle p^{(k)}, p^{(j)} \rangle = 0$ für $k \geq 1$ und $j = 0, ..., k-1$.

Hinweise:

- Es ist $e^{(k)} := x^{(k)} - x^*$. Die Aufgabe (a) ist damit trivial.
- Die restlichen 5 Beziehungen beweise man durch vollständige Induktion. Man muß alle 5 Beziehungen gleichzeitig behandeln! Die angegebene Reihenfolge macht Sinn.
- Im Induktionsschritt kann man für (b) und (c) die Beziehung (a) recht gut gebrauchen. Bei (c) muß man die Fälle $j = 0$ und $j > 0$ getrennt behandeln.
- Bei (e) und (f) kann man die Beziehung $Ap^{(j)} = \alpha_j^{-1}(r^{(j+1)} - r^{(j)})$ verwenden.