

ÜBUNGEN ZU MATHEMATIK IV - NUMERIK WS 2007/08

ABGABETERMIN: 5.3.2008, 10:15 Uhr

NAME:

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen, Gruppenarbeit ist nicht erlaubt. Die Ausarbeitung muß sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind (wenn möglich) grafisch darzustellen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen gemeinsam mit dem Übungsblatt zusammen!

4. Beispiel (100 Punkte):

Das Schwingungsverhalten eines geraden längsbelasteten elastischen Stabes (Druckstab) der Länge L lässt sich durch folgendes Modell beschreiben:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \rho g \quad \text{für alle } x \in (0, L), t > 0.$$

$u(x, t)$ ist die durch die Belastung verursachte Verschiebung des Punktes x in axialer Richtung zum Zeitpunkt t , ρ ist die Massendichte, g die Erdbeschleunigung und E der Elastizitätsmodul.

Der Stab sei am unteren Ende fest verankert:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{für alle } t > 0,$$

am oberen Ende wirke eine gegebene Druckkraft $F(t)$:

$$AE \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = -F(t) \quad \text{für alle } t > 0$$

mit der Querschnittsfläche A .

Im Anfangszeitpunkt $t = 0$ wird angenommen, dass der Stab in Ruhe ist:

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{für alle } x \in [0, L].$$

Durch Diskretisierung mit einer Finiten-Differenzen-Methode bezüglich x auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterabstand $h = L/n$ erhält man folgendes Anfangswertproblem: Gesucht ist $\underline{u}_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ mit

$$\underline{u}_h''(t) = \underline{f}_h(t) - K_h \underline{u}_h(t) \quad \text{für alle } t > 0$$

und

$$\underline{u}_h(0) = 0, \quad \underline{u}'_h(0) = 0$$

mit

$$K_h = \frac{E}{\rho h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_h(t) = \begin{pmatrix} -g \\ -g \\ \vdots \\ -g \\ -\frac{g}{2} - \frac{F(t)}{\rho A h} \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen $u_i(t)$ sind Näherungen der exakten Lösung $u(x, t)$ im Gitterpunkt $x_i = i h$.

Das obige Anfangswertproblem zweiter Ordnung lässt sich auch als Anfangswertproblem erster Ordnung schreiben, indem man die Hilfsfunktion $\underline{v}_h(t) = \underline{u}'_h(t)$ einführt: Gesucht sind $\underline{u}_h(t)$ und $\underline{v}_h(t)$ mit

$$\underline{u}'_h(t) = \underline{v}_h(t), \quad (1)$$

$$\underline{v}'_h(t) = \underline{f}_h(t) - K_h \underline{u}_h(t) \quad (2)$$

und den Anfangsbedingungen

$$\underline{u}_h(0) = 0, \quad \underline{v}_h(0) = 0.$$

Man erhält also ein lineares System von Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} \underline{u}_h(t) \\ \underline{v}_h(t) \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ -K_h & 0 \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \underline{u}_h(t) \\ \underline{v}_h(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{f}_h(t) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix J ist (in einem speziellen Skalarprodukt) normal, ihre $2n$ Eigenwerte sind rein imaginär. Das Differentialgleichungssystem ist also dissipativ.

Wendet man die θ -Methode (mit möglicherweise unterschiedlichen Parametern θ_1 für (1) und θ_2 für (2)) an, so erhält man Näherungen $\underline{u}_h^j$ und $\underline{v}_h^j$ für $\underline{u}_h(t)$ und $\underline{v}_h(t)$ zum Zeitpunkt $t_j = j\tau$ durch die Vorschrift

$$\underline{u}_h^{j+1} = \underline{u}_h^j + \tau [(1 - \theta_1)\underline{v}_h^j + \theta_1\underline{v}_h^{j+1}], \quad (3)$$

$$\underline{v}_h^{j+1} = \underline{v}_h^j + \tau [(1 - \theta_2)(\underline{f}_h^j - K_h \underline{u}_h^j) + \theta_2(\underline{f}_h^{j+1} - K_h \underline{u}_h^{j+1})] \quad (4)$$

mit $\underline{f}_h^k = \underline{f}_h(t_k)$ und der Anfangssetzung

$$\underline{u}_h^0 = 0, \quad \underline{v}_h^0 = 0.$$

Eliminiert man $\underline{v}_h^{j+1}$ in (3) mit Hilfe von (4), so erhält man

$$\underline{u}_h^{j+1} = \underline{u}_h^j + \tau \underline{v}_h^j + \tau^2 \theta_1 \left[(1 - \theta_2)(\underline{f}_h^j - K_h \underline{u}_h^j) + \theta_2(\underline{f}_h^{j+1} - K_h \underline{u}_h^{j+1}) \right].$$

Also

$$\left[I + \tau^2 \theta_1 \theta_2 K_h \right] \underline{u}_h^{j+1} = \underline{u}_h^j + \tau \underline{v}_h^j + \tau^2 \theta_1 \left[(1 - \theta_2)(\underline{f}_h^j - K_h \underline{u}_h^j) + \theta_2 \underline{f}_h^{j+1} \right]. \quad (5)$$

Die Berechnung der Näherungen zum Zeitpunkt t_{j+1} lässt sich folgendermaßen durchführen: Man berechnet zuerst $\underline{u}_h^{j+1}$ aus dem linearen Gleichungssystem (5). Anschließend erhält man $\underline{v}_h^{j+1}$ direkt aus (4). Im Spezialfall, dass entweder $\theta_1 = 0$ oder $\theta_2 = 0$ gilt, kann man $\underline{u}_h^{j+1}$ direkt aus (5) bestimmen (ohne Lösung eines linearen Gleichungssystems).

Erstellen Sie ein Programm zur Durchführung dieses Verfahrens im Zeitintervall $[0, t_E]$ für die skalierten Daten

$$L = 1, \quad A = 1, \quad \rho = 1, \quad g = 1, \quad E = 1, \quad F(t) = 1, \quad t_E = 10.$$

Betrachten Sie im Speziellen die folgenden drei Varianten des Verfahrens:

- (a) Das implizite Euler-Verfahren: $\theta_1 = \theta_2 = 1$
- (b) Das explizite Euler-Verfahren: $\theta_1 = \theta_2 = 0$.
- (c) Das Verfahren mit den Parametern $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = 1$. Man spricht in diesem Fall von einem so genannten partitionierten Runge-Kutta-Verfahren.

Untersuchen Sie mit diesen Verfahren das Schwingungsverhalten des Stabes.

Beginnen Sie Ihre Testrechnungen mit dem impliziten Euler-Verfahren: Wählen Sie für die Ortsschrittweite $h = L/n$ die Werte $n = 50$, $n = 100$ und $n = 200$. Beobachten Sie für jede dieser Ortsschrittweiten das Verhalten der Verschiebung $u(x)$ des Stabes (z.B.: in der Mitte $x_{n/2} = (n/2)h$) im Zeitintervall $[0, t_E]$ für die Zeitschrittweiten $\tau = t_E/m$ mit $m = 500$, $m = 1000$ und $m = 2000$. Alles sollte problemlos funktionieren. Warum?

Setzen Sie Ihre Testrechnungen mit der dritten Variante, dem partitionierten Runge-Kutta-Verfahren fort: Wählen Sie für die Ortsschrittweite $h = L/n$ den Wert $n = 50$. Beobachten Sie für diese Ortsschrittweite das Verhalten der Verschiebung $u(x)$ des Stabes (z.B.: in der Mitte $x_{n/2} = (n/2)h$) im Zeitintervall $[0, t_E]$ für die Zeitschrittweite $\tau = t_E/m$ mit $m = 500$. Alles sollte problemlos funktionieren. Was basiert, wenn die Zeitschrittweite geringfügig größer gewählt wird? Wiederholen Sie die Testrechnungen für $n = 100$ und $m = 1000$ und geringfügig größere Zeitschrittweiten und für $n = 200$ und $m = 2000$ und geringfügig größere Zeitschrittweiten.

Setzen Sie Ihre Testrechnungen mit dem expliziten Euler-Verfahren fort: Wählen Sie für die Ortsschrittweite $h = L/n$ den Wert $n = 50$. Beobachten Sie für diese

Ortsschrittweite das Verhalten der Verschiebung $u(x)$ des Stabes (z.B.: in der Mitte $x_{n/2} = (n/2)h$) im Zeitintervall $[0, t_E]$ für Zeitschrittweiten $\tau = t_E/m$. Wie groß muss m gewählt werden, um einigermaßen sinnvolle Näherungen zu erhalten? Wundern Sie sich nicht über extrem kleine Zeitschrittweiten. Suchen Sie dafür eine Erklärung, indem Sie die Kontraktivitätsbedingung

$$\tau\lambda \in S$$

diskutieren!

Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus diesen Testrechnungen? Bewerten Sie die drei Varianten und sprechen Sie Empfehlungen aus.