ÜBUNGEN ZU MATHEMATIK IV - NUMERIK WS 2007/08

ABGABETERMIN: 30.1.2008, 10:15 Uhr

NAME:

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen, Gruppenarbeit ist nicht erlaubt. Die Ausarbeitung muß sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind (wenn möglich) grafisch darzustellen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen gemeinsam mit dem Übungsblatt zusammen!

---

3. **Beispiel (100 Punkte):**
   Ein dünner längsbelasteter elastischer Stab (Druckstab) der Länge L lässt sich durch folgendes Modell beschreiben:

   (a) Gleichgewichtsbedingung:

   $$\frac{dN}{dx}(x) + q(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (0, L),$$

   $N(x) = A\,\sigma(x)$ ist die in positiver x-Richtung wirkende Längskraft einer flächenhaft verteilten Kraft, dargestellt mit Hilfe der Spannung $\sigma(x)$ und der konstanten Querschnittsfläche A, $q(x)$ ist die Kraftdichte (Kraft pro Länge) einer in Längsrichtung angreifenden Volumenkraft, jeweils an der Stelle x. Der Stab sei in vertikaler Lage. Als Volumenkraft wird nur die Gewichtskraft berücksichtigt, also $q(x) = -\rho\, g\, A$ mit der Massendichte ρ und der Erdbeschleunigung g. Die positive x-Richtung verläuft von unten nach oben.

   (b) Nichtlineares Materialgesetz:

   $$\sigma(x) = E\,\varepsilon(x)\left(2 + \frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_p}\right)$$

   mit Konstanten $\sigma_p > 0$, $\varepsilon_p > 0$, $E = \sigma_p/\varepsilon_p$, $\varepsilon(x)$ ist die Verzerrung an der Stelle x. (Die Materialgleichung ist für $\varepsilon(x) > -\varepsilon_p$ gültig.)

   (c) Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung: geometrisch linear

   $$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}(x),$$

   $u(x)$ ist die durch die Belastung verursachte Verschiebung des Punktes x in axialer Richtung.

Der Stab sei am unteren Ende fest verankert:

$$u(0) = 0,$$

am oberen Ende wirke eine gegebene Druckkraft F:

$$N(L) = -F.$$

Folgendes Problem soll untersucht werden: Wie verformt sich der am unteren Ende fest verankerte Druckstab mit gegebener Länge L, gegebener Querschnittsfläche A, gegebenen Konstanten σ_p, ε_p bei gegebener Belastung $q(x) = -\rho\, g\, A$ und F.

- Formulieren Sie dieses Problem als ein Randwertproblem einer Differentialgleichung 2. Ordnung für die Verschiebungen $u(x)$.
- Formulieren Sie anschließend das Randwertproblem als Variationsproblem: Gesucht ist $u \in V_g$, sodass

  $$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V_0.$$

  $V_0 =?$, $V_g =?$, $a(u, v) =?$, $\langle F, v \rangle =?$.
- Diskretisieren Sie das Problem mit Hilfe einer Finiten Elemente Methode mit stetigen stückweise linearen Elementen auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterabstand $h = L/n$. Dadurch erhalten Sie eine Näherungslösung

  $$u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i \varphi_i(x),$$

  wobei $\varphi_i(x)$ die dem Knoten $x_i = i \cdot h$ zugeordnete Basisfunktion der Knotenbasis ist. Stellen Sie das resultierende nichtlineare Gleichungssystem

  $$\underline{K}_h(\underline{u}_h) = \underline{f}_h \tag{1}$$

  für den Vektor $\underline{u}_h = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ der Näherungen für die exakte Lösung an den Gitterpunkten auf.
  Hinweis: Die nichtlineare Abbildung $\underline{K}_h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ setzt sich komponentenweise aus

  $$[\underline{K}_h(\underline{u}_h)]_i = a(u_h, \varphi_i)$$

  zusammen. Bei der Auswertung von $a(u_h, \varphi_i)$ benötigt man die (schwache) Ableitung von u_h, die sich stückweise durch die Komponenten des Vektors $\underline{u}_h$ ausdrücken lässt:

  $$u_h'(x) = \frac{1}{h}(u_{k+1} - u_k) \quad \text{für } x \in (x_k, x_{k+1}).$$

  Die Funktion $[\underline{K}_h(\underline{u}_h)]_i$ lässt sich für $i = 1, \ldots, n-1$ folgendermaßen darstellen:

  $$[\underline{K}_h(\underline{u}_h)]_i = d_i \cdot \left[-\frac{1}{h} u_{i-1} + \frac{2}{h} u_i - \frac{1}{h} u_{i+1} \right]$$

mit einem geeigneten Faktor d_i, der von u_{i-1} und u_{i+1} abhängt:

$$d_i = d(u_{i-1}, u_{i+1}).$$

Eine analoge Darstellung erhält man auch für $i = n$.
Dem in der ersten Übung betrachteten linearen Materialgesetz

$$\sigma(x) = E\,\varepsilon(x)$$

entspricht ein konstanter Faktor $d_i = d$ (unabhängig von $\underline{u}_h$), wodurch man dann anstelle von (1) ein lineares Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \tag{2}$$

erhält.

- Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $\underline{K}'_h(\underline{u}_h)$.
- Erstellen Sie ein Programm zur Durchführung des Newton-Verfahrens zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (1) mit vorgebbarem Startwert $\underline{u}_h^{(0)}$ und dem Abbruchkriterium
$$\|\underline{r}_h^{(k)}\|_2 \le \varepsilon\,\|\underline{r}_h^{(0)}\|_2 \quad \text{mit} \quad \underline{r}_h^{(k)} = \underline{f}_h^{(k)} - \underline{K}_h(\underline{u}_h^{(k)}).$$
Achten Sie bei der Implementierung des Verfahrens auf optimale Rechenzeit und optimalen Speicherbedarf für die Berechnung der Lösung des linearen Gleichungssystems in jedem Iterationsschritt des Newton-Verfahrens.
- Lösen Sie das nichtlineare Gleichungssystem (1) mit dem Newton-Verfahren für die skalierten Daten
$$L = 1, \quad A = 1, \quad \rho = 1, \quad g = 1, \quad \sigma_p = 2, \quad \varepsilon_p = 2, \quad F = 1$$
und untersuchen Sie folgende Punkte:
  (a) Wie verhält sich die Iterationszahl K in Abhängigkeit von der Anzahl n der Unbekannten?
  (b) Wie verhält sich die Iterationszahl K in Abhängigkeit der Wahl des Startwertes
  $$\underline{u}_h^{(0)} = (u_0(x_i))_{i=1,\dots,n}$$
  mit
  $$u_0(x) = -c \cdot \varepsilon_p \cdot x,$$
  für folgende Werte der Konstanten c:
    i. $c = 0$,
    ii. c geringfügig kleiner als 1,
    iii. $c = 1$,
    iv. c geringfügig größer als 1,
    v. $c = 2$?

Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus diesen Testrechnungen?