

ÜBUNGEN ZU MATHEMATIK IV - NUMERIK WS 2007/08

ABGABETERMIN: 16.1.2008, 10:15 Uhr

NAME:

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen, Gruppenarbeit ist nicht erlaubt. Die Ausarbeitung muß sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind (wenn möglich) grafisch darzustellen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen gemeinsam mit dem Übungsblatt zusammen!

2. Beispiel (100 Punkte):

Erstellen Sie ein Programm

```
[x, error, iter, flag] = cg(A, x, b, max_it, tol)
```

zur Durchführung des CG-Verfahrens zur Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Ax = b$$

mit folgender Bedeutung der Variablen:

input: A	reelle symmetrische positiv definite Matrix A
x	Startwert $x^{(0)}$ für die exakte Lösung x^*
b	rechte Seite b
max_it	maximale Anzahl der Iterationen
tol	Fehlertoleranz ε für das Abbruchkriterium $\ e^{(k)}\ \leq \varepsilon \ e^{(0)}\ $

output: x	Näherung $x^{(K)}$ für die exakte Lösung x^*
error	Norm des Fehlers $\ e^{(K)}\ $
iter	Anzahl K der durchgeführten Iterationen
flag	= 0: Näherungslösung gefunden = 1: Näherungslösung nicht gefunden

Verwenden Sie die Residuumsnorm

$$\|e^{(k)}\| = \|r^{(k)}\|_2 = \sqrt{(r^{(k)})^T r^{(k)}} \quad \text{mit} \quad r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$$

und achten Sie darauf, dass pro Iterationsschritt nur ein Matrix-Vektorprodukt der Form Ap berechnet wird. Überprüfen Sie zunächst die Korrektheit Ihres Programms anhand von einfachen selbstgewählten Testproblemen.

Betrachten Sie anschließend das d -dimensionale Testproblem (Laplace-Problem)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit $\Omega = (0, 1)^d$, $\Gamma = \partial\Omega$ (Rand von Ω) und dem Laplace-Operator

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$$

für $d \in \{1, 2, 3\}$. Durch Diskretisierung mit einer Finiten-Differenzen-Methode auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterabstand $h = 1/(N + 1)$ entsteht ein lineares Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \tag{1}$$

von $n = N^d$ Gleichungen in $n = N^d$ Unbekannten. Für den eindimensionalen Fall $d = 1$ entsteht folgende Matrix:

$$K_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für den zweidimensionalen Fall $d = 2$ entsteht folgende Matrix:

$$K_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ \hline \end{array} & & \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ \hline \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \ddots & \ddots & \ddots & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ \hline \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \\ \hline \end{array} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix K_h lässt sich für beliebige Werte $d \in \{1, 2, 3\}$ und $N \in \mathbb{N}$ in MATLAB leicht erzeugen, siehe Beilage.

Untersuchen Sie das Verhalten des CG-Verfahrens für das Gleichungssystem (1) für den eindimensionalen, den zweidimensionalen und den dreidimensionalen Fall.

Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Wählen Sie eine rechte Seite \underline{f}_h , für die Sie die exakte Lösung \underline{u}_h^* kennen. Starten Sie das CG-Verfahren mit einem Startwert $\underline{u}_h^{(0)} = \underline{u}_h^* + \underline{e}_h^{(0)}$ mit einem zufällig gewählten Anfangsfehler $\underline{e}_h^{(0)}$.

Im Speziellen untersuchen Sie folgende Punkte:

- (a) Stellen Sie für festes h einen typischen Verlauf des Fehlers $\|e^{(k)}\|$ in Abhängigkeit von k dar. (Verwenden Sie dazu ein semi-logarithmisches Diagramm: $\ln \|e^{(k)}\|$ in Abhängigkeit von k .)
- (b) Untersuchen Sie das Verhalten der Iterationszahl K und der Rechenzeit in Abhängigkeit von der Anzahl n der Unbekannten. Vergleichen Sie die experimentellen Resultate mit den Erkenntnissen der Konvergenzanalyse des CG-Verfahrens. Sie dürfen von folgenden Eigenschaften der Matrix K_h ausgehen: K_h ist eine reelle, symmetrische und positiv definite Matrix mit

$$\kappa(K_h) = O\left(\frac{1}{h^2}\right) \quad \text{und} \quad \text{nnz}(K_h) = O(n),$$

wobei $\text{nnz}(K_h)$ die Anzahl der Nichtnulleinträge der Matrix K_h bezeichnet.

- (c) Vergleichen Sie das CG-Verfahren mit dem direkten Verfahren

$$x = A \setminus b$$

und leiten Sie daraus Empfehlungen ab, unter welchen Bedingungen welches Verfahren zur Lösung von (1) eingesetzt werden sollte.

Dec 12, 07 8:46

laplacian.m

Page 1/1

```
function mat = laplacian(d,N);  
  
% make a Poisson matrix in R^d of dimension N^d  
  
h = 1/(N+1);  
hin2 = 1/(h*h);  
  
e = ones(N,1);  
  
T = spdiags([-e 2*e -e], -1:1, N, N);  
  
switch d  
  case 1  
    mat = hin2*T;  
  case 2  
    I1 = speye(N);  
    mat = hin2*(kron(T,I1) + kron(I1,T));  
  case 3  
    I1 = speye(N);  
    I2 = speye(N*N);  
    I3 = speye(N*N*N);  
    T2 = kron(I1,T);  
    mat = hin2*(kron(T,I2) + kron(T2,I1) + kron(I2,T));  
end  
  
return;
```