ÜBUNGEN ZU MATHEMATIK IV - NUMERIK WS 2007/08

ABGABETERMIN: 27.11.2007, 10:15 Uhr

NAME:

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen, Gruppenarbeit ist nicht erlaubt. Die Ausarbeitung muß sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind (wenn möglich) grafisch darzustellen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen gemeinsam mit dem Übungsblatt zusammen!

1. Beispiel (100 Punkte):

Ein dünner längsbelasteter elastischer Stab (Druckstab) der Länge L lässt sich durch folgendes Modell beschreiben:

(a) Gleichgewichtsbedingung:

$$\frac{dN}{dx}(x) + q(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (0, L),$$

$N(x) = A(x)\sigma(x)$ ist die in positiver x -Richtung wirkende Längskraft einer flächenhaft verteilten Kraft, dargestellt mit Hilfe der Spannung $\sigma(x)$ und der Querschnittsfläche $A(x)$, $q(x)$ ist die Kraftdichte (Kraft pro Länge) einer in Längsrichtung angreifenden Volumenkraft, jeweils an der Stelle x . Der Stab sei in vertikaler Lage. Als Volumenkraft wird nur die Gewichtskraft berücksichtigt, also $q(x) = -\rho g A(x)$ mit der Massendichte ρ und der Erdbeschleunigung g . Die positive x -Richtung verläuft von unten nach oben.

(b) Materialgleichung: Hookesches Gesetz

$$\sigma(x) = E \varepsilon(x),$$

E heißt Elastizitätsmodul, $\varepsilon(x)$ ist die Verzerrung an der Stelle x .

(c) Verzerrungs-Verschiebungsbeziehung: geometrisch linear

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx}(x),$$

$u(x)$ ist die durch die Belastung verursachte Verschiebung des Punktes x in axialer Richtung.

Der Stab sei am unteren Ende fest verankert:

$$u(0) = 0,$$

am oberen Ende wirke eine gegebene Druckkraft F :

$$N(L) = -F.$$

Folgendes Problem soll untersucht werden: Wie verformt sich der am unteren Ende fest verankerte Druckstab mit gegebener Länge L , gegebener Querschnittsfläche $A(x)$, gegebenem Elastizitätsmodul E bei gegebener Belastung $q(x)$ und F .

- Formulieren Sie dieses Problem als ein Randwertproblem einer Differentialgleichung 2. Ordnung für die Verschiebungen $u(x)$.
- Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Randwertproblems.
- Formulieren Sie anschließend das Randwertproblem als Variationsproblem.
- Diskretisieren Sie das Problem mit Hilfe einer Finiten Elemente Methode mit stetigen stückweise linearen Elementen auf einem äquidistanten Gitter mit Gitterabstand $h = L/n$. Dadurch erhalten Sie eine Näherungslösung

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x),$$

wobei $\varphi_i(x)$ die dem Knoten x_i zugeordnete Basisfunktion der Knotenbasis ist. Stellen Sie das resultierende Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h$$

für den Vektor $\underline{u}_h = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ der Näherungen für die exakte Lösung an den Gitterpunkten auf.

- Lösen Sie dieses Gleichungssystem für die Daten

$$L = 50 \text{ m},$$

$$A(x) = A_0 + \frac{x}{L}(A_L - A_0) \quad \text{mit} \quad A_0 = 2 \text{ m}^2, \quad A_L = 1 \text{ m}^2$$

$$\rho = 2.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad E = 21 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2, \quad F = 2 \cdot 10^4 \text{ N}$$

mit dem Thomas-Algorithmus, also einer Variante des Gaußschen Eliminationsverfahrens für Tridiagonalmatrizen. Achten Sie bei der Implementierung des Algorithmus auf optimale Rechenzeit und optimalen Speicherbedarf.

- Untersuchen Sie den Diskretisierungsfehler

$$e_h = \max_{i=1, \dots, n} |u_h(x_i) - u(x_i)| = \max_{i=1, \dots, n} |u_i - u(x_i)|$$

mit $x_i = i \cdot h$ in Abhängigkeit von h . Stellen Sie eine Vermutung der Form $e_h = O(h^p)$ auf.