3. Nichtlineare Gleichungen, Differentialgleichungen

1. Gegeben sei die Gleichung $x^3 = 5x - 1$. Durch grafische Darstellung und/oder Bisektion hat man festgestellt, daß die 3 Nullstellen etwa bei -2.35, 0.20 und 2.10 liegen. Der genaue Wert soll nun durch Fixpunktiteration $x_{k+1} := \varphi(x_k)$ ermittelt werden.
   (a) Geben Sie verschiedene Fixpunktiterationen an.
   (b) Welche Konvergenzeigenschaften sind von den zu den Fixpunktgleichungen gehörigen Iterationsverfahren $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ in der Umgebung der drei Nullstellen zu erwarten?
   (c) Mit $x_0 = 2.10$ sind einige (5 bis 10) Iterationsschritte für ein konvergentes Verfahren durchzurechnen und gebe eine Fehlerabschätzung an.

2. Gegeben seien die Polynome 3. Grades

$$y = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \quad (1)$$
$$y = (x+1)^2(x+2) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \quad (2)$$

   (a) Formulieren Sie für (1) und (2) das Newton-Verfahren! Führen Sie einige Iterationen mit $x_0 = 0$ aus und beobachten Sie das Konvergenzverhalten!
   (b) Wenden Sie auf (2) das für mehrfache Nullstellen modifizierte Newton-Verfahren an und beobachten Sie den Effekt!
   (c) Führen Sie das Newton-Verfahren für (2) mit $x_0 = -\frac{5}{3}$ durch!

3. Das Polynom $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + a_0$ hat für $a_0 = 16$ die vierfache Nullstelle $x = 2$. Wo liegen die Nullstellen für $a_0 = 16 \pm 10^{-4}$?

4. Gesucht ist die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 + 0.6y - 0.16 &= 0 \\ g(x,y) &= x^2 - y^2 + x - 1.6y - 0.14 &= 0 \end{aligned}$$

5. Die Funktion $y = \left(\frac{t}{2}\right)^2$ erfüllt die Anfangswertaufgabe $\dot{y} = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$. Führen Sie einige Schritte mit dem Polygonzugverfahren aus (beliebige Schrittweite) und begründen Sie das Verhalten der Näherungslösung.

6. Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\dot{y} = -2ty^2, \quad y(0) = 1. \quad (3)$$

   Berechnen Sie die exakte Lösung sowie Näherungslösungen in Intervall $[0, 0.5]$ mit Hilfe aller Verfahren 1. Ordnung der Vorlesung ($\tau = 0.1$, 5 Schritte bzw. $\tau = 0.05$, 10 Schritte). Berechnen Sie jeweils auch den Fehler $e_k = y(x_k) - y_k$.