2. Gleichungssysteme II

1. Man zeige, daß für die Konditionszahl bei regulären, quadratischen Matrizen A und B die Beziehungen $\kappa(A) \geq 1$, $\kappa(cA) = \kappa(A)$ und $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$ gelten, $c \in I\!R\backslash\{0\}$. Dabei werde die Konditionszahl über eine beliebige vektorinduzierte Matrixnorm definiert.

2. Man untersuche die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens für ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Man zeige, daß Gesamt- und Einzelschrittverfahren konvergieren.

   (b) Für das Einzelschrittverfahren gebe man eine a-priori-Abschätzung für $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$ an. Der Startvektor sei der Nullvektor.

   (c) Man gebe eine a-priori-Abschätzung an, wieviele Iterationen man mit dem Einzelschrittverfahren und Gesamtschrittverfahren ausführen muß, damit $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty < 0.01$.

   (d) Lösen Sie das obige Gleichungssystem mittels der Cholesky-Zerlegung der Koeffizientenmatrix.

4. Man diskretiere

$$\begin{aligned} -u_{xx} - 3u_{yy} &= 1 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

mittels zentralen Differenzenquotienten $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ und löse das Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \tag{1}$$

mittels

- Cholesky-Zerlegung,
- Jacobi-Verfahren, (nicht für $N = 128$)
- CG-Verfahren.

Stellen Sie die Lösungszeit in Abhängigkeit von N (Anzahl der Gitterpunkte) dar udn vergleichen Sie die Ergebnisse. Als Abbruchschranke für Jacobi-Verfahren und CG-Verfahren wähle man

$$\frac{\| Au^k - f \|}{\| Au^0 - f \|} \leq 10^{-5}.$$