

1. Numerisches Rechnen, Gleichungssysteme I

1. Berechnen Sie die kleinere der beiden Lösungen der Gleichung $x^2 - 1.8x + 0.0001 = 0$ ($p = 0.9, q = 0.1 \cdot 10^{-3}$) unter der Annahme einer vierstelligen Mantisse zur Basis 10! Bestimmen Sie den relativen Fehler!

Algorithmus 1: $x_1 = p - \sqrt{p^2 - q}$.

Algorithmus 2: $x_2 = p + \sqrt{p^2 - q}, \quad x_1 = \frac{q}{x_2}$.

2. Bekanntlich gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Gilt das auch in Computerarithmetik?
3. Untersuchen Sie, welche der beiden (mathematisch äquivalenten) Ausdrücke $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ und $\frac{1}{x(x+1)}$ für eine numerische Auswertung besser geeignet ist:

Schreiben Sie die Formeln in Form eines Algorithmus!

Führen Sie eine Fehleranalyse durch!

Überprüfen Sie Ihre Überlegungen an den Beispielen $x = 998$ und $x = 111$ (Basis 10, Mantissenlänge 3)!

4.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \varepsilon \\ \frac{3}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \end{pmatrix} \tag{1}$$

- (a) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus für $\varepsilon = 0.001$! Verwenden Sie dabei eine vierstellige dezimale Gleitpunktarithmetik! Vergleichen Sie die erhaltene Lösung mit der exakten Lösung $x_1 = \frac{3}{4}, x_2 = \frac{3}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$!
- (b) Schreiben Sie die Matrix aus (1) als Produkt einer linken unteren und einer rechten oberen Dreiecksmatrix (LU-Zerlegung).
- (c) Lösen Sie das Gleichungssystem (1) nochmals mit dem Gauß-Algorithmus, jedoch nun mit Spaltenpivotisierung! Verwenden Sie wieder eine vierstellige dezimale Gleitpunktarithmetik und vergleichen Sie die erhaltene Lösung mit der exakten Lösung und mit der Lösung aus Aufgabe (a)!
5. Sei $Ax = b$ und $A(x + \Delta x) = b + \Delta b, A$ symmetrisch.

(a) Zeigen Sie $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$!

- (b) Zeigen Sie für die Norm $\|\cdot\|_2$, daß diese Abschätzung scharf ist!

(Wie müßten bei gegebener Matrix A die Vektoren b und Δb gewählt werden, damit in der angegebenen Abschätzung das Gleichheitszeichen gilt?)

- (c) Wie (b), aber für $\|\cdot\|_\infty$.