3. Nichtlineare Gleichungen

1. Man berechne mit numerischer Integrationsformel das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{1-y}{2}} x^2 y^4 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

exakt.

2. Bei gegebenem $a \in I\!R$ $(a > 0)$ ist $x^* = \sqrt{a}$ Lösung der Fixpunktgleichungen

$$x = \varphi(x) = \frac{a}{x} \quad (1)$$

$$x = \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \quad (2)$$

Man zeige:

(a) Das durch (1) festgelegte Iterationsverfahren ist für jeden Startwert $x_0 > 0$ $(x_0 \neq \sqrt{a})$ divergent.

(b) Die (2) zugeordnete Iteration konvergiert für alle $x_0 > 0$ gegen $\sqrt{a}$, wobei $\sqrt{a} \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \ldots \leq x_0$.

(c) Man zeige, daß das Verfahren (2) mit der Ordnung 2 konvergiert!

3. Zur iterativen Berechnung von $\frac{1}{A}$ entwickle man nach Newton eine Iterationsvorschrift ohne Division und berechne $\frac{1}{3}$ mit Startwert 0.3.

4. Lösen Sie $x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$ mit dem Newton-Verfahren! Beginnen Sie mit $x_0 = 1$!

5. Ein allgemein gebräuchliches Verfahren zur Berechnung der Zahl $\sqrt[k]{a}$ $(a > 0)$ besteht darin, die Gleichung $x^k - a = 0$ nach Newton iterativ zu lösen.

(a) Man gebe die Iterationsvorschrift an!

(b) Zeigen Sie, daß das Verfahren für alle $x_0 > 0$ konvergiert!

(c) Man berechne den Wert $\sqrt[3]{17}$ auf $\pm 10^{-7}$ genau.

6. Lösen Sie mittels Newton-Verfahren das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} e^{xy} + x^2 + y &= 1.2, \\ x^2 + y^2 + x &= 0.55. \end{aligned}$$

Benutzen Sie als Startnäherung $x^{(0)} = 0.4$, $y^{(0)} = 0.25$ und $x^{(0)} = -2.6$, $y^{(0)} = -1.5$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis!