

2. Interpolation, Approximation, Quadratur

1. Gegeben seien die folgenden Wertepaare:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-0.2	0.5	-1	0.5	-0.2

(a) Man bestimme den zugehörigen linearen C^0 -Spline.

(b) Man bestimme den zugehörigen kubischen C^2 -Spline $S(x)$ mit $S^{(k)}(2) = S^{(k)}(-2)$, $k = 1, 2$.

2. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate (Ausgleichsrechnung) bestimme man für die folgenden Wertepaare (x_i, y_i) approximierende Polynome 1. und 2. Grades und vergleiche die zugehörigen Quadratsummen für 2008!

x_i	2003	2004	2005	2006	2007
y_i	15	5	1	1	3

3. Zu berechnen sei das Integral $I = \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \, dx$.

(a) Bestimmen Sie eine Gaußformel mit 1 Punkt, die für alle Polynome ersten Grades exakt ist.

(b) Bestimmen Sie eine Formel, die für alle quadratischen Funktionen exakt ist.

4. Sei $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Bestimmen Sie für $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ die bestapproximierende Polynomfunktion maximal n -ten Grades in $L^2(-1, 1)$ und stelle den Fehler jeweils graphisch dar.

Hinweise: Die Auswertung von Funktionswerten der Legendreschen Polynome erfolgt numerisch stabil mit der Rekursionsformel aus der Vorlesung.

Der Befehl `eig` bestimmt die Eigenwerte einer Matrix.

Zusatz: Wir betrachten das Randwertproblem: Suche u so daß

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x) \\ u(0) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

mit $f(x) = 1$ für $x > 0.5$ und $f(x) = 0$ für $x \leq 0.5$. Man diskretisiere dieses Problem mit der Finite- Elemente Methode mit $\mathbb{M}_h$ als Raum der stückweise linearen Splines zu den Stützstellen $\frac{j}{N}$, $j = 0, \dots, N$ für $N = 8, 16, 32$. Wie lautet die approximative Lösung u_h , wie sieht die Matrix G_h aus?