# 1. Gleichungssysteme

1. Man diskretiere

$$\begin{aligned} -2u_{xx} - u_{yy} &= 1 \quad \text{in } \Omega = (0,1) \times (0,1), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

mittels zentralen Differenzenquotienten und löse das Gleichungssystem

$$K_h \underline{u}_h = \underline{f}_h \tag{1}$$

mittels Cholesky-Zerlegung. Stellen Sie die Lösungszeit in Abhängigkeit von $N$ (Anzahl der Gitterpunkte in $x$ und $y$ Richtung, $N = 4, 8, 16, 32, 64, 128$) dar.

2. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Man zeige, daß Gesamt- und Einzelschrittverfahren konvergieren.

   (b) Für das Einzelschrittverfahren gebe man eine a-priori-Abschätzung für $\|x^{(10)} - x^*\|_\infty$ an. Der Startvektor sei der Nullvektor.

   (c) Man gebe eine a-priori-Abschätzung an, wieviele Iterationen man mit dem Einzelschrittverfahren und Gesamtschrittverfahren ausführen muß, damit $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty < 0.1$.

3. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt strikt diagonaldominant, falls $a_{ii} > \sum_{j \neq i} \mid a_{ij} \mid$ für alle $i$ gilt. Zeigen Sie:

   (a) Jeder Eigenwert der Matrix $A$ liegt in mindestens einem der Kreise $D_i$ mit Mittelpunkt $a_{ii}$ und Radius $\sum_{j \neq i} \mid a_{ij} \mid$.

   (b) Jede symmetrische strikt diagonaldominante Matrix ist positiv definit.

   (c) Geben Sie Schranken für die Eigenwerte der $n \times n$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

   an.

4. Man entwickle ein Programm zur iterativen Lösung linearer Gleichungssyteme $Ax = b$ mit symmetrischer (positiv definiter) Matrix $A$ der Dimension $n$. Man programmiere

   - Einzelschrittverfahren,
   - Gesamtschrittverfahren,

**Zusatz:** CG-Verfahren ($C = I$).

Seien

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

sowie $b = [1, \ldots, 1]$. Lösen Sie die Gleichungssysteme $A_4 x = b$, $A_2 x = b$ und (1) für $N = 8, 16, 32, 64, 128$ mit allen Verfahren. Verwenden Sie dabei die Abbruchschranke

$$\|b - Ax^{(k)}\|_2 \leq \epsilon \, \|b_3 - Ax^{(0)}\|_2.$$

für $\epsilon = 10^{-3}$ und $\epsilon = 10^{-6}$. Wie verhalten sich die Iterationszahlen? Stellen Sie die Iterationszahlen als Diagramm dar. Verwenden Sie eine logarithmische Skalierung zur Basis 2. Deuten Sie die erhaltenen Resultate.