- Using (14) with $v_h = \theta_h$ and $\|v\|_H \le c\|v\|_V \ \forall v \in V$, we obtain the estimates

$$\|\theta_h(t)\|_H \frac{d}{dt}\|\theta_h(t)\|_H = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_h(t)\|_H^2 = \langle \theta_h'(t), \theta_h(t)\rangle =$$

$$\overset{(14)}{=} -a(\theta_h(t),\theta_h(t)) - \langle g_h'(t), \theta_h(t)\rangle$$

$$\le -\mu_1 \|\theta_h(t)\|_V^2 + \|g_h'(t)\|_H \|\theta_h(t)\|_H$$

$$\le -\mu_1 c^{-2}\|\theta_h(t)\|_H^2 + \|g_h'(t)\|_H \|\theta_h(t)\|_H,$$

and, therefore,

Gronwall's Lemma

$$\frac{d}{dt}\|\theta_h(t)\|_H + \mu_1 c^{-2}\|\theta_h(t)\|_H \le \|g_h'(t)\|_H \quad \Big|\cdot e^{\mu_1 t/c^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mu_1 t/c^2}\|\theta_h(t)\|_H\right) \le e^{\mu_1 t/c^2}\|g_h'(t)\|_H \quad \Big| \int_0^t$$

$$e^{\mu_1 t/c^2}\|\theta_h(t)\|_H \le \|\theta_h(0)\|_H + \int_0^t e^{\mu_1 s/c^2}\|g_h'(s)\|_H\, ds.$$

Hence,

$$\|\theta_h(t)\|_H \le e^{-\mu_1 t/c^2}\|u_{0h} - R_h u_0\|_H + \int_0^t e^{-\mu_1(t-s)/c^2}\|g_h'(s)\|_H\, ds$$

q.e.d

- Remark 2.11:

1. For the initial error, we have $\quad u_{0h} = P_h u_0 \downarrow$

$$\|u_{0h} - R_h u_0\|_H \le \|u_{0h} - u_0\|_H + \|u_0 - R_h u_0\|_H = \|(I-P_h)u_0\|_H + \|(I-R_h)u_0\|_H$$

2. For sufficiently smooth functions, we have: $(R_h u(t))' = R_h u'(t)$:

$$\underbrace{\|u_h(t) - u(t)\|_H}_{\text{discr. error}} \le e^{-\mu_1 t/c^2}\left[\|(I-P_h)u_0\|_H + \|(I-R_h)u_0\|_H\right] + \|(I-R_h)u(t)\|_H$$
$$+ \int_0^t \|(I-R_h)u'(s)\|_H\, e^{-\mu_1(t-s)/c^2} ds$$

3. Example: Courant elements: $\|(I-R_h)v\|_0 \le c_0 h^2 \|v\|_2$

$$\|(I-P_h)v\|_0 \le \bar{c}_0 h^2 \|v\|_2$$

$$\Rightarrow \quad \|u_h(t) - u(t)\|_0 \le c h^2\left[\|u_0\|_2 e^{-\mu_1 t/c^2} + \|u(t)\|_2 + \int_0^t \|u'(s)\|_2 e^{-\mu_1(t-s)/c^2} ds\right].$$