NUMERISCHE ANALYSIS
3. Übungsblatt
WS 2006/2007

AUSGABETERMIN: Dienstag, 30.1.2007

ABGABETERMIN: **Freitag, 2.3.2007, 12:00 Uhr**

NAME :

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !

---

3 Numerische Lösung von Eigenwertproblemen

1. Implementieren Sie die direkte und inverse Vektoriteration zur Bestimmung des grössten und kleinsten Eigenwertes des symmetrischen Eigenwertproblems

$$Ku = \lambda u \tag{1}$$

wobei K eine symmetrische Bandmatrix ist !

2. Berechnen Sie numerische Näherungen an den grössten und kleinsten Eigenwert von (1) für die $n \times n$ Matrix

$$K = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & \mathbf{O} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & \end{bmatrix} \tag{2}$$

und für $n = 100$ und $n = 1000$ entsprechend mit der direkte und inverse Vektoriteration, wobei $h = 1/(n+1)$. Die exakten Eigenwerte von (2) sind hier bekannt (siehe Bemerkung 3.8):

$$\lambda_i = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{i\pi}{2(n+1)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Berechnen Sie die relativen Fehler

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_1^{(k)}|}{|\lambda_1|} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{|\lambda_n - \lambda_n^{(k)}|}{|\lambda_n|} \tag{4}$$

in Abhängigkeit von der Iteration k. Wieviele Iterationen benötigen Sie jeweils, um den relativen Fehler kleiner als $\varepsilon = 10^{-6}$ zu machen ?

4 Numerische Integration

Sei $\bar{\Delta} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1\}$ das Einheitsdreieck und $f \in C(\bar{\Delta})$. Zur Berechnung von

$$I[f] := \int_\Delta f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i, y_i) =: I_n[f] \tag{5}$$

verwenden wir eine Quadraturformel $I_n[f]$ mit $n + 1$ Gewichten w_i und $n + 1$ Stützstellen $(x_i, y_i) \in \bar{\Delta}$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

4.1 Mehrdimensionale Newton-Cotes-Formeln für das Einheitsdreieck Δ

Ersetzen Sie $f(x, y)$ durch die (affine-) lineare Interpolierende

$$p_1(x, y) = f(0, 0)(1 - x - y) + f(1, 0)x + f(0, 1)y \tag{6}$$

und berechnen Sie die zu den Stützstellen $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 0)$ und $(x_2, y_2) = (0, 1)$ gehörende Gewichte w_0, w_1 und w_2

$$\int_\Delta p_1(x, y) dx dy = \sum_{i=0}^{2} w_i f(x_i, y_i) =: I_2^{NC}[f] \tag{7}$$

4.2 Einfachste Gauß-Formel für das Einheitsdreieck Δ

Bestimmen Sie die einfachste Gauß-Formel ($n = 0$) für das Einheitsdreieck Δ, d.h. bestimmen Sie die Stützstelle (x_0, y_0) und das dazugehörige Gewicht w_0 so, dass

$$I[f] = \int_\Delta f(x, y) dx dy = w_0 f(x_0, y_0) =: I_0^G[f], \quad \forall f \in P_1 = \mathrm{span}\{1, x, y\}, \tag{8}$$

für alle Polynome vom Grade ≤ 1.

4.3 Integralberechnung

Berechnen Sie das Integral

$$I[f] = \int_\Delta \sin\left((x + y)\frac{\pi}{2}\right) dx dy \tag{9}$$

mit der Newton-Cotes-Formeln $I_2^{NC}[f]$ und mit der einfachsten Gauß-Formeln $I_0^G[f]$. Welche dieser beiden Formeln ist genauer ?