NUMERISCHE ANALYSIS
2. Übungsblatt
WS 2006/2007

AUSGABETERMIN: Dienstag, 16.1.2006

ABGABETERMIN: **Dienstag, 13.2.2007, 12:00 Uhr**

NAME :

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !

---

2 Iterative Auflösung nichtlinearer Gleichungen $f(x) = 0$

Zur Bestimmung von $\sqrt{5}$ wird die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - 5$ berechnet. Wir betrachten dazu die folgenden Fixpunktiterationen:

- FI(1): $x_k = \Phi_1(x_{k-1})$, mit $\Phi_1(x) = 5 + x - x^2$,
- FI(2): $x_k = \Phi_2(x_{k-1})$, mit $\Phi_2(x) = \frac{5}{x}$,
- FI(3): $x_k = \Phi_3(x_{k-1})$, mit $\Phi_3(x) = 1 + x - \frac{1}{5}x^2$,
- FI(4): $x_k = \Phi_4(x_{k-1})$, mit $\Phi_4(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$.

Lösen Sie dazu die folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass für die Funktionen Φ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ gilt:
$$\Phi_i(x^\star) = x^\star \quad \Longleftrightarrow \quad (x^\star)^2 - 5 = 0.$$
2. Berechnen Sie für den Startwert $x_0 = 2.5$ jeweils $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.
3. Skizzieren Sie für jedes dieser Verfahren die Funktion Φ_i und stellen Sie die Fixpunktiterationen $x_k = \Phi_i(x_{k-1})$ für den Startwert $x_0 = 2.5$ graphisch dar. Erklären Sie anhand dieser Skizzen die Resultate aus 2. !

4. Zeigen Sie: $|\Phi_i'(x^\star)| \geq 1$ für $i = 1, 2$ und $|\Phi_i'(x^\star)| < 1$ für $i = 3, 4$ für die positive Nullstelle $x^\star = \sqrt{5}$ von f. Zeigen Sie, dass die Iteration FI(3) lokal linear konvergiert und das Verfahren FI(4) lokal quadratisch konvergiert.

5. Zeigen Sie, dass das Verfahren FI(4) gerade das Newton-Verfahren angewandt auf die Gleichung $f(x) = 0$ ist.

6. Zeigen Sie, dass für eine konvergente Folge $\{x_k\}$ in $\mathbf{R}$, d.h. $\lim_{k\to\infty} x_k = x^\star$, die folgenden 2 Aussagen gelten:

   (a) Falls die Folge linear konvergiert, d.h. $\exists q \in (-1, 1),\ q \neq 0$:
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = q,$$
   dann gilt:
   $$\lim_{k\to\infty} q_k = q \quad \text{and} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{q_k}{1-q_k}(x_k - x_{k-1})}{e_k} = 1.$$

   (b) Falls die Folge überlinear konvergiert, d.h.
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = 0,$$
   dann gilt:
   $$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x_{k-1}}{e_k} = 1.$$

   wobei $e_k = x^\star - x_k$ und $q_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$.

7. Untersuchen Sie die Qualität der aus 6. folgenden a-posteriori Fehlerschätzungen

   (a) $x^\star - x_k \approx \frac{q_k}{1-q_k}(x_k - x_{k-1})$, wobei $q_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$, für FI(3), und

   (b) $x^\star - x_k \approx (x_k - x_{k-1})$ für FI(4).