

NUMERISCHE ANALYSIS

1. Übungsblatt

WS 2006/2007

AUSGABETERMIN: Freitag, 21.12.2006

ABGABETERMIN: Montag, 15.1.2007, 12:00 Uhr

NAME :

MATRIKELNUMMER:

Die Übungen sind grundsätzlich alleine zu machen ! Gruppenarbeit ist nicht erlaubt ! Die Ausarbeitung muss sorgfältig abgefasst werden. Wichtig ist, dass nicht nur die Lösung, sondern auch die Lösungsidee (der Weg zur Lösung) beschrieben wird. Programme sind in Form von gut dokumentierten Programmlisten beizulegen. Testresultate sind durch Beilage übersichtlich gestalteter Original-inputs und Original-outputs zu belegen. Das Abgabeformat ist DIN A4. Heften Sie alle Unterlagen zu einem Übungsblatt zusammen !

1 Direkte und iterative Auflösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$

1.1 Programmieren

Implementieren Sie

1. das Cholesky-Verfahren und
2. das CG-Verfahren

zur direkten bzw. iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme der Art $Ax = b$ mit einer symmetrischen und positiv definiten Bandmatrix A mit der Bandweite p in einer von Ihnen gewählten Programmiersprache (Matlab, C++). Eingangsdaten (INPUT) sind die Dimension n , die Bandweite p , die Koeffizienten a_{ij} der Systemmatrix A im Band und die Koeffizienten b_i der rechten Seite b . Ausgangsdaten (OUTPUT) sind die Komponenten x_j des Lösungsvektors x !

1.2.2 Iteratives Verfahren

Lösen Sie jetzt das Gleichungssystem (1) für $n = 100$ und $n = 1000$ mit dem implementierten CG-Verfahren. Wählen Sie als Anfangsnäherung $x^{(0)}$ den Nullvektor 0. Stoppen Sie die CG-Iteration, wenn das Defektkriterium

$$\|b - Ax^{(k)}\| \leq \varepsilon \|b\|$$

mit $\varepsilon = 0.1 h^2 = 0.1(n+1)^{-2}$ erfüllt wird. Geben Sie die dafür notwendige Anzahl $I(\varepsilon)$ und vergleichen Sie diese mit den theoretischen Vorhersagen ! Berechnen Sie den maximalen Fehler

$$\max_{i=1,\dots,n} |u_h^{Cholesky}(x_i) - u_h^{CG}(x_i)|$$

zwischen der Cholesky-Lösung $u_h^{Cholesky}$ und der CG-Lösung u_h^{CG} in den Gitterpunkten für $n = 100$ und $n = 1000$!