

Verallgemeinerungen:

1. $x_0 = 0$ ODER $x_n = 1$ ist Stützstelle: Gauß-Radau
2. $x_0 = 0$ UND $x_n = 1$ sind Stützstellen: Gauß-Lobatto
3. Gewichtete Gauß-Formeln:

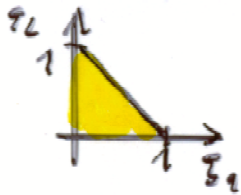
$$I[f] \equiv \int_a^b w(x) f(x) dx \stackrel{!}{=} \sum_{i=0}^n w(x_i) f(x_i) \equiv I_n[f] \quad \forall f \in P_{2n+1}$$

4. Mehrdimensionale Gauß-Formeln für $\Omega = (0,1)^d$:

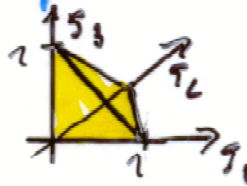
$$\int_{(0,1)^d} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d = \int_0^1 \left(\dots \left(\int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_d \right) dx_{d-1} \dots \right) dx_1$$

1D Gauß-Formeln $\approx$
$$\sum_{j=1}^d \sum_{i_j=0}^{n_j} w_{i_1}^{(1)} w_{i_2}^{(2)} \dots w_{i_d}^{(d)} f(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \dots, x_{d,i_d})$$

5. Gauß-Quadratur für spezielle (Master) Gebiete:



Einheitsdreieck



Einheits-tetraeder

6. Behandlung beliebiger Dreiecke etc durch Abbildung auf Master: z.B.

$$\int_{x_1, x_2} f(x) dx \xrightarrow[\substack{\xi = \xi(x) \\ x = x(\xi)}]{\substack{\xi = \xi(x) \\ x = x(\xi)}} \int_{\xi_1, \xi_2} f(x(\xi)) \underbrace{\left| \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi) \right|}_{\text{Jacobi}} d\xi \approx \dots$$

Krumm. Dreieck $\longleftrightarrow$ Einheitsdreieck

7. Beliebige, beschränkte und hinreichend glatte Gebiete:

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^R \bar{\delta}_r \subset \mathbb{R}^d: \quad \int_{\Omega} f(x) dx = \sum_{r=1}^R \int_{\delta_r} f(x) dx$$

$$= \sum_{r=1}^R \int_{\Delta} f(x_{\delta_r}(\xi)) \left| \frac{\partial x_{\delta_r}(\xi)}{\partial \xi} \right| d\xi$$

$$\delta_r \rightleftharpoons \Delta \quad x = x_{\delta_r}(\xi) \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^n w_{ij} g_{ij}(\xi_i)$$