Konvergenz von Quadraturformeln:

- **Satz 7.13:** Satz von Banach und Steinhaus

  Vor.: Sei $I_n[f] = \sum_{i=0}^{n} w_i^{(n)} f(x_i^{(n)})$ eine Folge von Quadraturformeln (QF) für $I[f] = \int_a^b f(x)\,dx$ mit folgenden Eigenschaften:

  1) die Gewichte $\{w_i^{(n)}\}$ sind alle positiv.
  2) $I_n[f] \xrightarrow{n\to\infty} I[f] \;\forall f \in D \subset C[a,b]$ mit D ist dicht in $C[a,b]$.

  Bh.: Dann gilt: $I_n[f] \xrightarrow{n\to\infty} I[f] \;\forall f \in C[a,b]$.

- **Bemerkung 7.14:**

  Die Newton-Cotes-Formeln konvergieren trivialerweise für alle Polynome (d.h. 2) ist OK), aber es treten bald negative Gewichte auf (d.h. 1) gilt nicht ☹). Es lässt sich zeigen, dass die Newton-Cotes-Formeln nicht immer (d.h. $\forall f \in C[a,b]$) konvergieren ☹

- **Ausweg:** Zusammengesetzte (summierte) NC-Formeln, z.B. summierte Trapezregel: $y_j = jh$, $h = (b-a)/m$:

$$I[f] = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{m-1} (y_{j+1}-y_j)\left[\tfrac{1}{2}f(y_j) + \tfrac{1}{2}f(y_{j+1})\right]$$

$$= h\left[\tfrac{1}{2}f(y_0) + f(y_1) + \dots + f(y_{m-1}) + \tfrac{1}{2}f(y_m)\right] = I_h[f]$$

Dann gilt die Fehlerabschätzung:

$$|I[f] - I_h[f]| \le \sum_{j=0}^{m-1} h \left| \int_0^1 \overbrace{f(y_j + \xi(y_{j+1}-y_j))}^{\tilde f_j(\xi)}\,d\xi - \left[\tfrac{1}{2}\underbrace{f(y_j)}_{\tilde f_j(0)} + \tfrac{1}{2}\underbrace{f(y_{j+1})}_{\tilde f_j(1)}\right]\right|$$

$$\overset{\exists \bar y_j \in (y_j, y_{j+1})}{\le} \sum_{j=0}^{m-1} h \frac{h^2}{12} |f''(\bar y_j)| \le \frac{(b-a)}{12} h^2 \max_{j=0,\dots,m-1} \max_{y \in [y_j, y_{j+1}]} |f''(y)| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Man sieht: $I_h[f] \xrightarrow{h\to 0} I[f] \;\forall f \in C[a,b]$.