

• Satz 7.11:

Vor.: Gegeben sei Fkt. $f \in C[0,1]$ und die $n+1$ äquidistanten Stützstellen $x_i = i/n, i = \overline{0, n}$.

Bh.: Dann gelten für die zugehörigen Newton-Cotes Formeln die folgenden Fehlerdarstellungen:

1. n - gerade, $f \in C^{n+2}[0,1], \exists \xi \in (0,1)$:

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + \frac{\left(\frac{1-0}{n}\right)^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_0^n t^2(t-1) \cdots (t-n) dt$$

2. n - ungerade, $f \in C^{n+1}[0,1], \exists \xi \in (0,1)$:

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + \frac{\left(\frac{1-0}{n}\right)^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_0^n t(t-1) \cdots (t-n) dt$$

Beweis: siehe Isaacson + Keller, S. 326.

• Tabelle 7.12:

n	Name	Stützstellen x_i	Gewichte w_i	$\int_0^1 f(x) dx - \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$
0	MR	$\pi/2$	1	$\frac{1}{24} \left(\frac{1-0}{1}\right)^3 f^{(2)}(\xi)$
1	TR	$0, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12} \left(\frac{1-0}{1}\right)^3 f^{(2)}(\xi)$
2	SR	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{50} \left(\frac{1-0}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
3	3/8-Regel	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80} \left(\frac{1-0}{3}\right)^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945} \left(\frac{1-0}{4}\right)^7 f^{(6)}(\xi)$

↓
Auftreten negativer Gewichte
für größere n !