

7.2, Numerische Differentiation

■ Aufgabe: Geg. sei Fkt. $f(\cdot) \in X \subset C^1[a, b]$,
von der zumindestens die Werte $f_i = f(x_i)$
an den Stützstellen $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$
bekannt sind.

Ges. $f'(x)$ für $x \in [a, b]$!

■ Idee: $f'(x) \approx \varphi'(x) \in X_n$ z.B.
 $\approx p'_n(x) \in X_n = P_n$ mit $p_n = p_n[f]$

■ Satz 7.9:

Vor.: Sei $f \in C^{n+1}[a, b]$ und sei $p_n = p_n[f] \in P_n$
das Interpolationspolynom vom Grade $\leq n$
bezüglich der paarweise verschiedenen Punkte
 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ und den Werten $f(x_i), i = \overline{0, n}$

Bh.: Dann gibt es zu jedem Stützpunkt x_i
ein $\xi_i \in (a, b)$ mit

$$f'(x_i) - p'_n(x_i) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_i)}{(n+1)!} \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)$$

■ Beispiel 7.10:

1. $n=1$: $x_0 = x$, $x_1 = x+h$

$$p_1(y) = f(x) \frac{x+h-y}{h} + f(x+h) \frac{y-x}{h}$$

$$f'(x) \approx p'_1(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{\text{Taylor: } \exists \theta \in (0,1)}{=} \dots$$

$$= \frac{1}{h} [f(x) + f'(x)h + f''(x+\theta h) \frac{h^2}{2} - f(x)]$$

$$= f'(x) + O(h)$$

$$f_x(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \text{vorwärtiger Differenzenquotient}$$