Extremaleigenschaft der Kubischen Splines:

- **Satz 7.7:**

  Vor.: Gegeben seien Gitterpunkte $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ und dazugehörige Werte $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Sei $s(x)$ die interpolierende Spline-Funktion, d.h. $s(x_i)=f_i \ \forall i=\overline{0,n}$ mit einer der drei oben genannten Randbedingungen und sei $\varphi(x)\in C^2[a,b]$ eine beliebige weitere interpolierende Funktion mit den gleichen RB.

  Bh.: Dann gilt: $s(\cdot)$ minimiert die mittlere Krümmung, d.h.

  $$\int_a^b (s''(x))^2\,dx \le \int_a^b (\varphi''(x))^2\,dx .$$

- **Beweis:** siehe Vorlesung NuPDE, WS 2007/2008 ■

Konvergenz:

- **Satz 7.8:**

  Vor.: Gegeben seien Gitterpunkte $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $h=\max\limits_{i=\overline{1,n}} h_i$, $h_i=x_i-x_{i-1}$.
  Sei $f\in C^4[a,b]$ und $s(\cdot)$ die interpolierende Spline-Funktion, d.h. $s(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$, mit den RB $s'(x_0)=f'(x_0)$ und $s'(x_n)=f'(x_n)$.

  Bh.: Dann gibt es eine Konstante $c_\nu \ne c_\nu(h)$:

  $$\|f^{(\nu)}-s^{(\nu)}\|_{C[a,b]} \le c_\nu h^{4-\nu}\|f^{(4)}\|_{C[a,b]}, \quad \nu=0,1,2.$$

- **Beweis:** siehe Vorlesung NuPDE, WS 2007/2008. ■

- **Bem.:**

  $$\begin{aligned} s &\rightrightarrows f \\ s' &\rightrightarrows f' \quad \text{für } h\to 0 \ ! \\ s'' &\longrightarrow f'' \end{aligned}$$