

Konstruktion Kubischer Splines

- $S(x)$ stimmt auf $[x_i, x_{i+1}]$ mit einem kubischen Polynom überein, das sich mit Hilfe der bekannten Funktionswerte

$$S(x_i) = f_i \quad \text{und} \quad S(x_{i+1}) = f_{i+1}$$

und der noch unbekannten zweiten Ableitungen

$$S''(x_i) = c_i \quad \text{und} \quad S''(x_{i+1}) = c_{i+1}$$

wie folgt darstellen lässt:

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]$$

mit $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ und

$$(5) \quad \begin{cases} a_i = f_i, \\ b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6} (2c_i + c_{i+1}), \\ d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{h_{i+1}}. \end{cases}$$

- Damit ist die Stetigkeit von $S(x)$ und $S''(x)$ in den Stützpunkten x_i und damit in $[a, b]$ gesichert!

- Die Stetigkeit von $S'(x)$ in den Pkten $x_i, i = \overline{1, n-1}$:

$$S'(x_{i-0}) = S'(x_{i+0})$$

$$b_{i-1} + c_{i-1}h_i + \frac{d_{i-1}}{2}h_i^2 = b_i$$

Mit (5) folgt also: $i = \overline{1, n-1}$

$$\frac{h_i}{6} c_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3} c_i + \frac{h_{i+1}}{6} c_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

Zusammen mit den Randbedingungen z.B.

$$c_0 = c_n = 0 \quad (\text{für die natürlichen Splines}),$$

ergibt das ein tridiagonales Gleichungssystem, das sich effizient mit $O(n)$ ops auflösen lässt.