

Interpolationsfehler:

• Satz 7.4:

Vor.: Sei $f \in C^{n+1}[a,b]$ und $p_n = p_n[f] \in \mathcal{P}_n$
das Interpolationspolynom vom Grade $\leq n$
bzgl. der paarweise verschiedenen Stützstellen
 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ und den Werten $f(x_i), i = \overline{0, n}$.

Bh.: Dann gibt es zu jedem $\bar{x} \in [a,b]$ ein $\bar{\xi} \in (a,b)$ mit

$$(3) \quad f(\bar{x}) - p_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{\xi})}{(n+1)!} \omega(\bar{x})$$

wobei $\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\bar{x})$.

Beweis:

- Sei $\bar{x} = x_i$: (3) ok $\omega(x_i) = 0!$
- Sei nun $\bar{x} \neq x_i \quad \forall i = \overline{0, n}$. Betr. die Fkt.

$$F(x) = f(x) - p_n(x) - K \omega(x) \text{ mit } K = \frac{f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})},$$

die offenbar die $n+2$ Nullst. $x_0, x_1, \dots, x_n, \bar{x}$ besitzt.

Nach dem Satz von Rolle ($F(y_j) = F(y_{j+1}) = 0$

$\Rightarrow \exists \xi_j \in (y_j, y_{j+1}) : F'(\xi_j) = 0$; $(n+1)$ -mal anwenden!

$$\begin{aligned} \exists \bar{\xi} \in (a,b) : 0 &= F^{(n+1)}(\bar{\xi}) = f^{(n+1)}(\bar{\xi}) - K \omega^{(n+1)}(\bar{\xi}) \\ &= f^{(n+1)}(\bar{\xi}) - \frac{f(\bar{x}) - p_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})} (n+1)! \end{aligned}$$

q.e.d.

• Folgerung 7.5:

$$\|f - p_n\|_{C[a,b]} := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$