7.1.1. Lagrange-Interpolation mit Polynomen

■ **Wählen:** $X_n = P_n := \{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \}$, d.h.

$$\varphi(x) = p(x) = p_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

■ **Existenz, Eindeutigkeit, Darstellung:**

- **Satz 7.1:**

  Vor.: $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$

  Bh.: $\exists!$ Polynom $p \in P_n$: (1) $p(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$.

- **Beweis 1:** über Abbildungseigenschaften!

  $P : p \in P_n \xmapsto[\text{Abb.}]{\text{Lineare}} (p(x_0), \ldots, p(x_n))^T \in \mathbb{R}^{n+1}$

  $\Downarrow$ injektiv: $p(x_i) = 0 \ \forall i = \overline{0,n} \Rightarrow p \equiv 0$

  $\dim P_n = n+1$ $\qquad$ $\dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1$

  $\Downarrow$ surjektiv

  q.e.d.

- **Beweis 2:** Konstruktiv!

  $p(x_i) = f_i, \ i = \overline{0,n} \iff$ zur Lösung des GS

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Vandermond-Matrix

$$\det[\vdots] \overset{(\text{mws})}{=} \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j) \neq 0$$

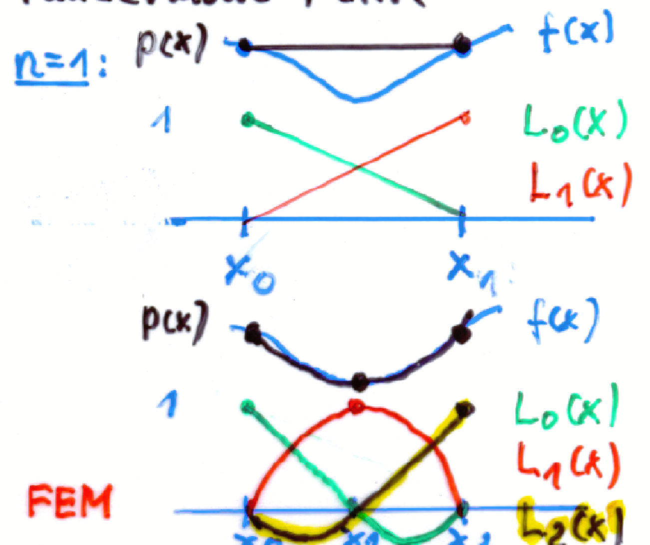
- **Darstellung:**

$$(2) \qquad p(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$$

mit Lagrange-Polynomen

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\Rightarrow L_i(x_k) = \delta_{ik}$$



FEM