

Kapitel 7 Numerische Grundaufgaben

Interpolation, Numerische Differentiation und Numerische Integration

7.1. Interpolation

Klassische Interpolationsaufgaben

1. Gesucht ist die Rekonstruktion $\varphi \in X_n$ (z.B. $X_n = P_n$) einer (eventuell unbekannten) Funktion $f \in X$ (z.B. $X = C$) aus ihren bekannten Werten f_i an gegebenen Stützstellen x_i mit $i = \overline{0, n}$, wobei $x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j$ vorausgesetzt wird:

$$(1) \quad \boxed{\varphi(x_i) = f_i \quad \forall i = \overline{0, n} = 0, 1, \dots, n}$$

Bezeichnung: $P_n := \{ p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \}$

2. Ersatz der bekannten Funktion $f \in X$ durch eine "einfachere" Funktion $\varphi \in X_n$:

$$(1) \quad \boxed{\varphi(x_i) = f_i := f(x_i) \quad \forall i = \overline{0, n}}$$

Verallgemeinerte Interpolationsaufgabe:

1. $\varphi(x_i) = f_i \mapsto l_i(\varphi) = \tilde{f}_i \quad \forall i = \overline{0, \tilde{n}}$,
 2. $\varphi(x_i) = f(x_i) \mapsto l_i(\varphi) = l_i(f) \quad \forall i = \overline{0, \tilde{n}}$,
- wobei l_i gegebene lineare Funktionale sind,
z.B. $l_i(\varphi) := \varphi(x_i) \rightarrow$ klassische Interpolation
 $l_i(\varphi) := \varphi'(x_i)$ etc.

Typische praktische Anwendungen:

add 1. Messwerte $\{(x_i, f_i), i = \overline{0, n}\} \mapsto$ Funktion: $\varphi(x)$

add 2. $f'(x) \approx \varphi'(x)$ bzw. $\int f(x) dx \approx \int \varphi(x) dx$