6.3.2. Direkte und inverse Vektoriterationen

Die direkte Vektoriteration (v. Mises):

- Idee: Sei $A = X D X^{-1}$ – diagonalisierbar
  mit $D = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$ EW: $|\lambda_1| \leq \ldots \leq |\lambda_{n-1}| < |\lambda_n|$
  $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ EV ← Basis, d.h.
  $AX = XD$, d.h. $A x_i = \lambda_i x_i$, $i = \overline{1,n}$.
  Sei
  $$q^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in \mathbb{C}^n \text{ bzw. } \mathbb{R}^n$$
  ein gegebener Startwert (random).
  Dann gilt offenbar:
  $$A^k q^{(0)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A^k x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k x_j$$
  $$= \lambda_n^k \Big[\alpha_n x_n + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Big(\frac{\lambda_j}{\lambda_n}\Big)^k\Big]$$
  $$\approx \lambda_n^k \alpha_n x_n \text{ für hinreichend große } k!$$
  Folglich konvergiert $A^k q^{(0)}$ gegen einen EV zum betragsgrößten EV, falls $\alpha_n \neq 0$.

- Algorithmus 6.21: v. Mises

Startvektor $q^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ wählen (random)
FOR $k=0$ STEP 1 UNTIL "Convergence" DO
$\quad z^{(k+1)} = A q^{(k)}$
$\quad q^{(k+1)} = z^{(k+1)} / \lVert z^{(k+1)} \rVert$
END FOR

- EW-Berechnung: $\lambda_n^{(k+1)} = \dfrac{(Aq^{(k+1)}, q^{(k+1)})}{(q^{(k+1)}, q^{(k+1)})} = (Aq^{(k+1)}, q^{(k+1)}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_n$