

■ Folgerung 6.17: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine orthogonale Matrix Q mit $Q^T A Q = T = \text{Tridiagonalmatrix}$.

■ Bemerkung 6.18:

1. QR-Algorithmus erhält die Hessenberg-Gestalt bzw. die Tridiagonalgestalt (im Symmetriefall):

$$A^{(1)} = A = \begin{matrix} \text{Hessenberg} \\ H \end{matrix} / \begin{matrix} \text{Tridiagonal} \\ T \end{matrix}$$

$\Downarrow$

$$A^{(k)} = \text{Hessenberg} / \text{Tridiagonal}$$

$\downarrow$

$$A^{(k+1)} = \begin{matrix} O(n^2) & O(n) \text{ ops} \\ \text{Hessenberg} / \text{Tridiagonal} \end{matrix}$$

2. Für große, dünnbesetzte Matrizen ist die beschriebene Methode zur Reduktion auf einfacher Gestalt zu aufwendig und benötigt zuviel Speicherplatz.

Deshalb verwendet man in der Praxis:

• das Arnoldi-Verfahren: $A \in \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow H$

• das Lanczos-Verfahren: $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow T$