Satz 6.16:

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert eine unitäre Matrix U : $U^H A U = U^{-1} A U = H$, wobei H eine Hessenberg-Matrix ist.

Beweis: = Konstruktiv!

- $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat offenbar die Form

$$A = \left[\begin{array}{c|c} \times & \times \\ \hline a_1 & \times \end{array}\right] \quad \text{mit } a_1 \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

- Man wählt im 1. Schritt eine unitäre Matrix $P_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$:

$$P_1 a_1 = \alpha e_1 \text{ mit } \alpha \in \mathbb{C},\ e_1 = (1,0,\dots,0)^T \in \mathbb{C}^{n-1},$$

siehe PLU. 3.6, Householder-Verfahren (mms: orthog. $\to$ unitär)

Für die unitäre Matrix

$$U_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^H \\ 0 & \end{array}\right]$$

gilt dann:

$$U_1^H A U_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1 \\ 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \times & \times \\ \hline a_1 & \times \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^H \\ 0 & \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} * & \times \\ \hline \alpha e_1 & * \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_1^H \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} * & * \dots \times \\ \hline \alpha e_1 & \tilde{A}_1 \end{array}\right],$$

d.h. die erste Spalte der transformierten Matrix hat bereits die richtige Struktur!

- Man setzt nun das Verfahren in analoger Weise für $\tilde{A}_1$ fort, bis man nach $n-2$ Schritten eine Hessenberg-M. erhält:

$$H = U_{n-2}^H U_{n-3}^H \cdots U_1^H A \underbrace{U_1 \cdots U_{n-3} U_{n-2}}_{=U} = U^H A U \qquad \square$$

q.e.d