6.2.2. Reduktion auf einfache Gestalt

Aufwandsreduktion:

- ops (1 QR-Schritt) $= O(n^3)$
  $K = I(\varepsilon)$ - QR-Iterationen: $O(I(\varepsilon)\, n^3)$ ops
- Idee:
  1. Reduktion von A auf einfachere Gestalt
     $\tilde{A} = X^{-1} A X$ (Hessenberg-Matrix bzw. Tridiagonalm.)
     durch Ähnlichkeitstransformationen mit unitären Matrizen!
  2. Anwendung des QR-Algorithmus auf $\tilde{A}$
     (mit wesentlich geringerem Aufwand!)

Definition 6.15: $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt

(a) (rechte obere) Hessenberg-Matrix

$\Leftrightarrow \; a_{ij} = 0 \;\; \forall\, i,j \in \{1,2,\dots,n\} : \; i > j+1$

$$A = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & & \vdots \\ & * & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \;\; * & * \\ & & * & * \end{bmatrix}$$

(b) Tridiagonalmatrix (= symmetr. Hessenberg-M.)

$$A = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$