

• Satz 6.13: = IV zur Realisierung von Satz 6.5.

Vor. 1 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit folgenden Eigenschaften:

1. Die EW von A sind betragsmäßig verschieden:
 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$.
2. $A = X D X^{-1}$ sei mit einer Matrix $Y = X^{-1}$ diagonalisierbar, wobei Y eine Dreieckszerlegung $Y = L_Y U_Y$ besitzt. $D = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$.

Bh.: Dann gelten für die Folge der Matrizen $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$, die durch den QR-Alg. 6.12 erzeugt werden, die folgenden Aussagen:

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : i > j$.
2. Genauer: $a_{ij}^{(k)} = O\left(\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right|\right)$ — " —
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ii}^{(k)} = \lambda_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Beweis: siehe Stoer & Bulirsch bzw.

Deufhard / Hohmann für sym. Matr., S. 139 ff. □

• Bemerkung 6.14: EV-Berechnung

$K = I = I(\mathbb{C})$

$$A^{(I)} = Q_{I-1}^{-1} \dots Q_1^{-1} A Q_1 \dots Q_{I-1} = \underbrace{Q_1 \dots Q_{I-1}}_Q \begin{bmatrix} a_{11}^{(I)} & * & * \\ & \ddots & \\ \varepsilon_{ij} & & a_{nn}^{(I)} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{A}^{(I)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(I)} & * \\ & \textcircled{I} & \\ & & a_{nn}^{(I)} \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A^{(I)}) = \sigma(A)$$

$$(A^{(I)} - \lambda I) y = 0 \rightsquigarrow (\tilde{A}^{(I)} - \tilde{\lambda} I) \tilde{y} = 0$$

$$Y^{-1} A^{(I)} Y = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$A^{(I)} Y = Y D \rightsquigarrow Q^{-1} A Q Y = Y D \rightsquigarrow A Q Y = \underbrace{Q Y}_{\text{Modalmatrix}} \underbrace{D}_{\text{EV}} \underbrace{Y^{-1}}_{\text{EV}}$$