

6.2. Numerische Lösung des vollständigen Eigenwertproblems (EWP)

6.2.1. Der QR-Algorithmus

■ Ziel: $A^{(1)} = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$A^{(k+1)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ähnlich}}}{X_k^{-1}} A^{(k)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{unitär} \\ X_k^{-1} = X_k^H}}{X_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & x & \dots & x \\ & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Schur Normalform
EW

? Satz 6.5. von Schur ?

■ Basisalgorithmus:

● Algorithmus 6.12: QR-Algorithmus

$A^{(1)} = A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bzw. $\mathbb{R}^{n \times n}$ „ $I(\varepsilon)$ “

FOR $k=1$ STEP 1 UNTIL "Convergence" DO

1. Berechne QR-Zerlegung von $A^{(k)} = Q_k R_k$
mit
 - Householder-Verfahren (Pkt. 3.6)
 - Givens-Rotationen
 - Gram-Schmidt-Verfahren
2. $A^{(k+1)} = R_k Q_k$

ENOFOR

● Bemerkung:

- $\text{ops}(\text{QR-Alg.}) = O(I(\varepsilon) n^3)$
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$: $Q_k^{-1} = Q_k^H$ - unitär
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $Q_k^{-1} = Q_k^T$ - orthogonal
- $A^{(k+1)} = R_k Q_k = (Q_k^{-1} A^{(k)}) Q_k = Q_k^{-1} A^{(k)} Q_k$
d.h. $\sigma(A^{(k+1)}) = G(A^{(k)}) = \dots = G(A^{(1)}) = G(A)$