

- Def. 6.10: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls eine reguläre Matrix X existiert mit

$$A = X D X^{-1}$$

$$A X = X D,$$

wobei

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag} [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

EW von A

- Satz 6.11: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gestört mit $\Delta A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und sei $A = X D X^{-1}$ diagonalisierbar.

Dann gibt es zu jedem EW $\bar{\lambda}$ der gestörten Matrix $\bar{A} = A + \Delta A$ einen EW λ von A mit

$$|\bar{\lambda} - \lambda| \leq \kappa_p(X) \cdot \|\Delta A\|_p$$

für $p = 1, 2, \infty$, wobei $\kappa_p(X) = \text{cond}_p(X) := \|X\|_p \|X^{-1}\|_p$.

Beweis: Sei $\bar{\lambda} \in \sigma(A + \Delta A)$ und $\bar{\lambda} \notin \sigma(A)$.

Da $X^{-1}(A + \Delta A - \bar{\lambda} I)X = (D - \bar{\lambda} I) + X^{-1}\Delta A X$ singular ist, ist offenbar auch $I + (D - \bar{\lambda} I)^{-1} X^{-1}\Delta A X$ singular. Dann folgt notwendigerweise (vgl. Satz 3.1)

$$1 \leq \|(D - \bar{\lambda} I)^{-1} X^{-1} \Delta A X\|_p \leq$$

$$\leq \|(D - \bar{\lambda} I)^{-1}\|_p \|X^{-1}\|_p \|\Delta A\|_p \|X\|_p$$

$$= \kappa_p(X) \|\Delta A\|_p \max_{\lambda \in \sigma(A)} \frac{1}{|\bar{\lambda} - \lambda|}$$

Also $|\bar{\lambda} - \lambda| \leq \kappa_p(A) \|\Delta A\|_p$ für ein EW $\lambda \in \sigma(A)$.

- $X^{-1} = X^H$ - unitäre Matrix ($\Leftarrow A$ normal, d.h. $A^H A = A A^H$)
 $\kappa_2(X) = 1$ und $|\lambda_{\max}(A)| = \rho(A) = \|A\|_2 = \|A\|_2$. Somit folgt

$$\varepsilon_\lambda := \frac{|\bar{\lambda} - \lambda|}{|\lambda_{\max}(A)|} \leq \varepsilon_A := \frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2}.$$