

Eigenwertabschätzungen:

- Eigenschaften: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

1. Falls A regulär: $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$,
wobei $\sigma(A) = \{\text{Menge aller EW von } A\} = \text{Spektrum}$.
2. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A)$
3. $\sigma(A) = \sigma(A^T)$
4. $\sigma(AB) = \sigma(BA)$

- Satz 6.6: $|\lambda| \leq \|A\| \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

Beweis: Sei $\lambda \in \sigma(A)$, x zugehöriger EV: $\|x\|=1$

$$|\lambda| = |\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| = \|A\|. \quad \blacksquare$$

Bsp.: A SPD. Dann gilt mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$:

$$0 < \lambda_{\max}(A) \leq \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

- Satz 6.7: (Gerschgorin)

Die Vereinigung der Kreisscheiben

$$K_i = \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \}$$

enthält alle EW der Matrix $A = [a_{ij}]_{i,j=1, \dots, n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$,
d.h. $\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^n K_i$.

Beweis: Sei $\lambda \in \sigma(A)$ und $x \in \mathbb{C}^n$ der dazugehörige EV.

Sei i so gewählt, dass $|x_i| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j|$.

Aus $Ax = \lambda x$ folgt $(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$, folglich

$$|\lambda - a_{ii}| |x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j|, \text{ d.h.}$$

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \frac{|x_j|}{|x_i|} \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \blacksquare$$