

6.1. Theoretische Grundlagen: $Ax = \lambda x$ F 56

■ Charakteristisches Polynom:

- Def. 6.1: Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Das Polynom $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| \in \mathbb{P}_n$ heißt charakteristisches Polynom von A .
- Satz 6.2: $\lambda \in \mathbb{C}$ ist EW von A gdw. $p(\lambda) = 0$.
Beweis:
 $(A - \lambda I)x = 0$ hat nichttriviale Lsg. $x \neq 0$ gdw. $\det(A - \lambda I) = 0$ ■
- Idee zur numerischen Berechnung von EW:
→ numer. Best. der Nullst. von $p(\lambda)$ z.B. mit Newton-Vorf.!

■ Ähnliche Matrizen:

- Def. 6.3: Zwei Matrizen A und B heißen ähnlich, falls $\exists$ reg. Matrix X : $A = X B X^{-1}$.
- Satz 6.4: Ähnliche Matrizen haben gleiche EW.
Beweis: $\det(A - \lambda I) = \det(X(B - \lambda I)X^{-1}) = |X| |B - \lambda I| |X^{-1}|$. ■
- Idee zur numerischen Berechnung von EW:
→ Konstruktion (zumindestens näherungsweise) einer zu A ähnlichen Matrix (z.B. Diagonalmatrix bzw. Dreiecksmatrix), deren EW leicht zu bestimmen sind!
- Satz 6.5 (Schur): Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ existiert eine unitäre Matrix U : $A = U T U^H$ mit der sogenannten Schur-Normalform

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ \textcircled{1} & & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n = \text{EW. von } A.$$