

Beweis von Satz 6.5: $U^{-1} A U = U^H A U = T$

induktiv!

- $n=1$: trivial $U=[1]$
- Annahme: Der Satz gelte für alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$
- Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $\lambda_1 \in \sigma(A)$ mit dem zugehörigen EW x .

Householder (Pkt. 3.6): $\exists$ unitäre Matrix P : $Px = \alpha e_1$
 $P^{-1} = P^H = P$, $\alpha = -\text{sign}(x_1) \|x\| \neq 0$

$$P^{-1} e_1 = P^H e_1 = P e_1 = \frac{1}{\alpha} x$$

$$\text{Also gilt: } P^{-1} A P e_1 = P A P e_1 = P A \frac{1}{\alpha} x = P \frac{\lambda_1}{\alpha} x = \lambda_1 e_1$$

d.h.

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \text{ mit } A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)} \text{ und } a^H \in \mathbb{C}^{1 \times (n-1)}$$

Nach Induktionsannahme $\exists$ unitäre Matrix $U_1 \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$:

$$U_1^H A_1 U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}[\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n].$$

$$\text{Sei nun } U = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n-1) \times (n-1)}$$

Offenbar ist U unitär. Tatsächlich

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^{-1} \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^H \end{bmatrix} P^H = U^H.$$

Dann gilt:

$$U^H A U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^H \end{bmatrix} P^H A P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & a U_1 \\ 0 & A_1 U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a U_1 \\ 0 & U_1^H A_1 U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ g.e.}$$