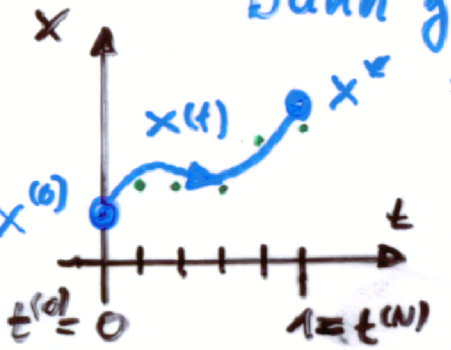
Homotopiemethoden = Einbettungsverfahren:

- Sei $x^{(0)}$ eine Näherung an $x^* \in \mathbb{R}^n$: $F(x^*)=0$.

  Btr. nun die Einbettung

$$(5) \qquad F(x,t) = F(x) - (1-t)F(x^{(0)}) \stackrel{!}{=} 0$$

Dann gilt



$t = t^{(0)} = 0$: $F(x, t^{(0)}) = F(x) - F(x^{(0)}) = 0$

hat die bekannte Lsg. $x^{(0)}$

$\downarrow$

$t = t^{(N)} = 1$: $F(x, t^{(N)}) = F(x) = 0$

hat die unbek. Lsg. $x^{(N)} \doteq x^*$

$F(t, x(t)) = 0$

- Das legt folgenden Einbettungsalgorithmus nahe:

$t^{(0)}$: $F(x^{(0)}, t^{(0)}) = F(x^{(0)}) - F(x^{(0)}) = 0$

$\wedge$

$t^{(1)}$: Man erhöht nun t geringfügig: $t = t^{(1)} > t^{(0)}$ und kann hoffen, dass das Newton-Verfahren, angewendet auf (5) für $t = t^{(1)}$, d.h.

$$F(x, t^{(1)}) = F(x) - (1 - t^{(1)})F(x^{(0)}) \stackrel{!}{=} 0,$$

mit dem Startwert $x^{(0)}$ schnell gegen ein Wert $x^{(1)}$ konvergiert, da sich das Problem nur geringfügig geändert hat.

$\wedge$

$t^{(2)}$: $x^{(2)}$: $F(x, t^{(2)}) = 0$ NEWTON mit $x^{(1)}$

$\wedge$

$\vdots$

$\wedge$

$t^{(N)} = 1$: $x^{(N)} = x^*$: $F(x, \overset{"=1"}{t^{(N)}}) = F(x) = 0$