- **<u>Satz 5.8:</u>** LSV

<u>Vor.:</u> Sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diffbar und für $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ gelte: $F(x^{(k)}) \neq 0$ und $\exists\, F'(x^{(k)})^{-1}$.

<u>Bh.:</u> Dann gibt es eine Zahl $\alpha_0 > 0$ mit

$$\|F(x^{(k)} + \alpha w^{(k)})\|^2 < \|F(x^{(k)})\|_2^2$$

für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$.

<u>Beweis:</u> Btr. Fkt. $f(x) = \|F(x)\|^2 = F^T(x) F(x)$.

Dann gilt: $f'(x) = 2\, F(x)^T F'(x)$.

Also erhalten wir mittels TAYLOR-Entwicklung

$f' = \nabla f$

$$f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)}) \approx f(x^{(k)}) + \alpha \underline{f'(x^{(k)})\, w^{(k)}}$$

Mit $f'(x) = \nabla f(x) = 2 F^T(x) F'(x)$ folgt

$$\underline{f'(x^{(k)})\, w^{(k)}} \underset{\substack{\uparrow \\ w^{(k)} = -F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})}}{=} -2 F^T(x^{(k)}) F(x^{(k)}) = -2 f(x^{(k)}) < 0$$

$$\Rightarrow f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)}) \approx (1 - 2\alpha) f(x^{(k)}) < f(x^{(k)})$$

für hinreichend kleine Werte von α. q.e.d

- **<u>Bemerkung 5.9:</u>**

1. Dieser Satz zeigt also, dass durch sukzessive Verkleinerung von α (z.B. Halbierung) das Kriterium (4) immer erfüllt werden kann!
2. Das Kriterium (4) ist etwas zu schwach, um unter geeigneten Voraussetzungen die Konvergenz des gedämpften Newton-Verfahrens nachweisen zu können. Man verwendet stattdessen das Kriterium:
$$f(x^{(k)} + \alpha w^{(k)}) < (1 - 2\mu\alpha) f(x^{(k)})$$
für die Wahl der nächsten Schrittweite $\alpha^{(k)}$, wobei $\mu \in (0,1)$ vorgegeben ist, z.B. $\mu = 0.1$.