

5.3.1. Das gedämpfte NEWTON-Verfahren

■ Newton-Verfahren als Liniensuchverfahren (LSV)

- Ausgehend von der aktuellen Näherung $x^{(k)}$ berechnet man eine sogenannte Suchrichtung $w^{(k)}$ als Lösung des linearen GS

$$F'(x^{(k)}) w^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

und wählt als nächste Näherung jenen Punkt $x^{(k+1)}$, den man von $x^{(k)}$ aus in Richtung (entlang der "Linie") $w^{(k)}$ mit Schrittweite $\alpha = 1$ erreicht.

- Gedämpftes Newton-Verfahren: $\alpha = 1 \mapsto \alpha^{(k)} \in (0, 1]$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^{(k)} w^{(k)},$$

wobei die Schrittweite $\alpha^{(k)} \in (0, 1]$ so gewählt wird, dass zumindestens (vgl. KV Optimierung):

$$(4) \quad \|F(\underbrace{x^{(k)} + \alpha^{(k)} w^{(k)}}_{x^{(k+1)}})\|_2^2 < \|F(x^{(k)})\|_2^2.$$

Man erhofft sich dadurch, dass der nächste Iterationspunkt $x^{(k+1)}$ "näher" bei der Nullstelle liegt, da für die Nullstelle x^* natürlich gilt: $\|F(x^*)\|_2^2 = 0$.

- Bisektionsverfahren zur Liniensuche

Eine praktische Durchführung der Liniensuche wäre z.B. das sukzessive Durchprobieren der Werte

$$\alpha^{(k)} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad \text{Bisektion}$$

für $\alpha^{(k)}$, bis das Kriterium (4) schließlich erfüllt ist. Der folgende Satz 5.8.2 zeigt die grundsätzliche Durchführbarkeit dieser Strategie.