

■ Algorithmus 5.4: Newton-Verfahren

$x^{(0)}$ - given initial guess, $k=0,1,\dots$

1. Compute the residual $r^{(k)} = -F(x^{(k)})$ and the Jacobi matrix $G_k = F'(x^{(k)}) = [\partial F_i(x^{(k)}) / \partial x_j]$
2. Solve $G_k w^{(k)} = r^{(k)}$
3. Compute $x^{(k+1)} = x^{(k)} + w^{(k)}$

■ Konvergenzeigenschaften des NEWTON-Verfahrens:

• Satz 5.5: (quadratische Konvergenz)

Vor.: 1. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal diffbar, stetig

2. $x^* \in \mathbb{R}^n$ sei Nullstelle von F , d.h. $F(x^*) = 0$,

3. $F'(x^*)$ sei regulär, d.h. $\exists F'(x^*)^{-1}$.

Bh.: Dann konvergiert das NEWTON-Verfahren für Startwerte $x^{(0)}$, die hinreichend nahe bei x^* liegen und es gelten die Fehlerabschätzungen:

1. $\|x - x^{(k+1)}\| \leq c \|x - x^{(k)}\|^2$ (q-quadratisch)

2. $\|x - x^{(k+1)}\| \leq \bar{c} q^{2^{k+1}-1}$ (r-quadratisch)

wobei $0 \leq q < 1$ und $c, \bar{c}$ positive Konstanten sind.

• Beweis: für den Fall $n=1$

$$\underset{\text{NEWTON}}{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})}} \iff \underset{\text{FPI}}{x^{(k+1)} = G(x^{(k)})} \text{ mit } G(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

• Offenbar gilt: $G(x^*) = x^*$ und $G'(x^*) = 1 - \frac{F(x^*)^2 - F(x^*)F''(x^*)}{F'(x^*)^2} = 0$

• Für den Fehler $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ folgt:

$$\begin{aligned} e^{(k+1)} &= x^{(k+1)} - x^* = G(x^{(k)}) - G(x^*) = \leftarrow \exists \theta \in (0,1) \\ &= G'(x^*) (x^{(k)} - x^*) + \frac{1}{2} G''(x^* + \theta(x^{(k)} - x^*)) (x^{(k)} - x^*)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |x^{(k+1)} - x^*| \leq c |x^{(k)} - x^*|, \quad c = \frac{1}{2} \|G''(\bar{u}(x^*))\|$$

$$\Rightarrow |e^{(k)}| \leq \dots \leq (c |e^{(0)}|)^{2^k-1} |e^{(0)}| = q^{2^k-1} |e^{(0)}| \quad 2. \text{ q.e.d.}$$