Satz 5.2: (Banachscher Fixpunktsatz)

Vor.: $D = \overline{D} \subset \mathbb{R}^n$ und $G : D \to \mathbb{R}^n$:

1) $G(D) \subset D$ (Abb. ~~in~~ von D in sich)
2) $\|G(y) - G(x)\| \leq q \|y - x\| \;\forall x, y \in D$ mit $q < 1$ (Kontraktive Abb.)

Bh.: Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in D$ und die Folge $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ konvergiert gegen x^* für alle Startwerte $x^{(0)} \in D$.

Des weiteren gelten die Fehlerabschätzungen:

1. $\| x^* - x^{(k+1)} \| \leq q \, \| x^* - x^{(k)} \|$ (q-linear)
2. $\| x^* - x^{(k+1)} \| \leq C \, q^{k+1}$ (r-linear)

mit $C = \| x^* - x^{(0)} \|$.

Beweis: mms

Bemerkung 5.3:

Sei $x^* \in \mathring{D}$ und G in x^* diffbar. Dann gilt:

1) $\| G'(x^*) \| < 1 \implies$ q-lineare Konvergenz
2) $\rho(G'(x^*)) < 1 \implies$ r-lineare Konvergenz

für Startwerte, die hinreichend nahe bei x^* liegen (↷ Satz von Ostrowski)

Im Spezialfall $n = 1$ gilt:

1) $0 < G'(x^*) < 1 \implies$ monotone Konvergenz
2) $-1 < G'(x^*) < 0 \implies$ alternierende Konvergenz

Beispiel 5.1: Konvergenzgeschwindigkeitsanalyse

$$x^{(k+1)} - x^* = G(x^{(k)}) - G(x^*) \approx G'(x^*)(x^{(k)} - x^*)$$

$$\implies \quad | x^{(k+1)} - x^* | \leq q \, | x^{(k)} - x^* | \quad \text{mit}$$

$$q \approx | G'(x^*) | = \tfrac{1}{2} e^{x^*/2}$$