- **Satz 4.6:**

Vor.: A und C seien SPD Matrizen.

$\gamma_1 \leq \lambda_{min}(C^{-1}A) = \lambda_{min}(C^{-0.5} A C^{-0.5}) = \lambda_{min}$ und

$\gamma_2 \geq \lambda_{max}(C^{-1}A) = \lambda_{max}(C^{-0.5} A C^{-0.5}) = \lambda_{max}$

seien der minimale EW und der maximale EW des verallgemeinesten EWP $Ax = \lambda Cx$.

Bh.: Dann konvergiert das PCG-Verfahren mit dem Präkonditionierer C r-linear gegen die Lsg. des GS (1) $Ax = b$ und es gilt die Fehlerabschätzung:

$$(12) \quad \|x - x^{(k)}\|_A \leq \frac{2q^k}{1+q^{2k}} \|x - x^{(0)}\|_A \leq 2q^k \|x - x^{(0)}\|_A$$

mit $q = \dfrac{\sqrt{\lambda_{max}} - \sqrt{\lambda_{min}}}{\sqrt{\lambda_{max}} - \sqrt{\lambda_{min}}} = \dfrac{\sqrt{\varkappa(C^{-1}A)} - 1}{\sqrt{\varkappa(C^{-1}A)} + 1} \leq \dfrac{\sqrt{\gamma_2/\gamma_1} - 1}{\sqrt{\gamma_2/\gamma_1} + 1}$

Beweis: siehe Lit. bzw. Vorl. NuPDE WS 07/08

- **Bemerkung 4.7:** $\|x - x^{(k)}\|_A \leq \varepsilon \|x - x^{(0)}\|_A$ ist garantiert, falls k : $2q^k \leq \varepsilon$, d.h.

$$I(\varepsilon) = k \approx \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln q^{-1}} = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{-\ln\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\varkappa(C^{-1}A)} + 1}\right]}$$

$$\approx \ln(2/\varepsilon) \frac{\sqrt{\varkappa(C^{-1}A) + 1}}{2} = O\left(\ln\frac{2}{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varkappa(C^{-1}A)}\right)$$

- **Beispiel:** FD-Diskr. aus Pkt. 3.1 ($d=1$) und 4.1. ($d=2$)

$\Longrightarrow \varkappa(A) = O(h^{-2})$, $n_h = O(h^{-d})$

$\Longrightarrow I(\varepsilon) = O(\ln \varepsilon^{-1} \cdot h^{-1})$ (CG: $C = I$)

$\Longrightarrow Q(\varepsilon) = I(\varepsilon) \cdot Q = O(\ln \varepsilon^{-1} \cdot h^{-(d+1)})$

$$Q = O(n_h) = O(h^{-d})$$