

Mögliche Verbesserungen: $(\cdot, \cdot) := (\cdot, \cdot)_2$

- 1) **Präkonditionierung:** $Ax = b \mapsto G^{-1}Ax = G^{-1}b$
 $s^{(k+1)} = w^{(k+1)} = G^{-1}r^{(k+1)}$ mit G ist SPD.

Motivation:

- Satz 4.4: $\kappa(G^{-1}A) \ll \kappa(A)$!
- $G = A$: $s^{(k+1)} = A^{-1}(b - Ax^{(k+1)}) = x - x^{(k+1)}$

$\Rightarrow$ **Präkonditioniertes Gradientenverfahren!**

Es gilt Satz 4.4 mit $\kappa(A) \mapsto \kappa(G^{-1}A)$!

- 2) Verwendung **Konjugierter** (= A-orthogonaler) Suchrichtungen:

$$(As^{(k+1)}, s^{(k)}) = (s^{(k+1)}, s^{(k)})_A = 0 \quad !$$

$\downarrow$

$$s^{(k+1)} = r^{(k+1)} + \beta^{(k)} s^{(k)} = w^{(k+1)} + \beta^{(k)} s^{(k)}$$

$\downarrow$

$$w^{(k+1)} = G^{-1}r^{(k+1)} \quad \text{Präkond., d.h. 1)}$$

$$(A(r^{(k+1)} + \beta^{(k)} s^{(k)}), s^{(k)}) \stackrel{!}{=} 0, \text{ d.h.}$$

$$\beta^{(k)} = - \frac{(Ar^{(k+1)}, s^{(k)})}{(As^{(k)}, s^{(k)})} \stackrel{1)}{=} \frac{(Aw^{(k+1)}, s^{(k)})}{(As^{(k)}, s^{(k)})_2}$$

Motivation: ideale Suchrichtung: $s^{(k+1)} = x - x^{(k+1)}$

$$(\underbrace{x - x^{(k)}}_{s^{(k)}}, r^{(0)})_A = (Ax - Ax^{(k)}, r^{(0)}) =$$

$$\downarrow \quad s^{(k)} \perp_A r^{(0)} = s^{(0)} \quad = (r^{(1)}, r^{(0)}) = (r^{(1)}, s^{(0)}) = 0$$

$$r^{(1)} = r^{(0)} - \alpha^{(0)} A s^{(0)}$$

$$(r^{(1)}, s^{(0)}) = (r^{(0)}, s^{(0)}) - \alpha^{(0)} (A s^{(0)}, s^{(0)}) = 0$$

$\Rightarrow$ 1) + 2) = **PCG-Verfahren!**